Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mouloud Mammeri Tizi-Ouzou

Faculté Des Sciences

Département de Physique

Thèse De Doctorat

Présentée par : Mr. BELHADI Zahir

Sujet :

APPLICATION DE LA MÉCANIQUE QUANTIQUE NON COMMUTATIVE EN RELATIVITÉ ET QUANTIFICATION DES SYSTÈMES AVEC CONTRAINTES

Devant le jury composé de :

BOUZAR Hamid	***Professeur***	**Univ. Tizi-Ouzou**	***Président***
MENAS Ferhat	***Professeur***	**Univ. Tizi Ouzou**	***Rapporteur***
BÉRARD Alain	***Professeur***	**Univ. Lorraine-France**	***Co-rapporteur***
BOUDA Ahmed	***Professeur***	**Univ. Béjaia**	***Examinateur***
MOHAMED-MEZIANI Abdelkader	***M.C.A***	**Univ. Béjaia**	***Examinateur***
MOHRBACH Hervé	***Professeur***	**Univ. Lorraine-France**	***Invité***

Soutenue publiquement le : 16 - 12 - 2015 à Tizi Ouzou (L.P.C.Q)

Je dédie ce modeste travail à tous les membres de ma famille surtout mes chers parents, à ma bien-aimée Younici Karima, ainsi qu'à tous mes amis(es) et copains(es), sans oublier tous mes enseignants et instituteurs.

Remerciements

Cette thèse a pu aboutir grâce à Mr. ***MENAS*** *Ferhat, professeur à l'université de Mouloud Mâammeri de Tizi Ouzou, à qui je dois la sincère reconnaissance pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant d'encadrer ce travail tout au long de mes cinq années de thèse.*

Je tiens à remercier Mr. Alain ***BÉRARD****, professeurs à l'université de Lorraine, pour sa disponibilité, pour ses orientations et pour ses corrections apportées à ce manuscrit, sans oublier Mr. Hervé* ***MOHRBACH*** *professeur aussi au sein de la même université pour les discussions et les conseils. Qu'ils veuillent agréer tous les deux l'expression de ma gratitude et de ma reconnaissance la plus profonde.*

Je remercie aussi le président du jury Mr. ***BOUZAR*** *Hamid, professeur à l'université de Tizi-Ouzou, ainsi que les examinateurs, Mr.* ***BOUDA*** *Ahmed, professeur à l'université A-Mira de Béjaia et Mr.* ***MOHAMED-MEZIANI*** *Abdelkader, maître de conférences à l'université A-Mira de Béjaia. C'est un honneur pour moi qu'ils ont accepté de juger ce travail et d'être présents à ma soutenance.*

Enfin, je remercie toutes les personnes qui m'ont soutenu et ayant contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Cette thèse de doctorat a été finalisée dans le cadre du programme franco-algérien PROFAS B+.

Table des matières

Introduction générale **6**

1 Introduction à la relativité spéciale déformée (DSR) **10**
1.1 Groupes de Lie de transformations continues 10
1.1.1 Algèbres de Lie 10
1.1.2 Groupes de Lie de transformations de $\mathbb{R}^n$ 11
1.1.3 Groupes de Lie à un seul paramètre 16
1.2 Rappels sur le groupe de Lorentz et la relativité restreinte 18
1.2.1 Cinématique et dynamique relativistes 18
1.2.2 Espace de Minkowski et formulation covariante 22
1.2.3 Groupe des transformations de Lorentz générale 25
1.2.4 Lien entre les crochets de Poisson et le groupe de Lorentz 29
1.3 La relativité restreinte déformée 31
1.3.1 Motivations 31
1.3.2 κ-espace de Minkowski et κ-algèbre de Lorentz 33
1.3.3 κ-transformation de Lorentz des moments conjugués 35
1.3.4 Relation de dispersion de Magueijo-Smolin 39
1.3.5 κ-transformation finie des coordonnées 42
1.3.6 κ-composition des vitesses 44
1.3.7 Variables canoniques 46
1.4 Transformations non canoniques 48

2 L'équation de Dirac Déformée **53**
2.1 L'équation de Dirac en relativité restreinte 53
2.1.1 Le principe de correspondance et l'équation de Klein-Gordon 54
2.1.2 L'équation de Dirac 56
2.1.3 L'équation de Dirac dans l'espace des impulsions 60
2.1.4 La transformation de Foldy-Wouthuysen (FW) et le spectre d'énergie d'une particule libre 61
2.2 L'équation de Dirac déformée dans l'espace des impulsions 65
2.2.1 L'équation de Dirac déformée dans l'espace des impulsions 66
2.2.2 La première transformation du H_D 67
2.2.3 La transformation de Foldy-Wouthuysen déformée 69

2.2.4 Interprétation des résultats 71
2.3 L'équation de Dirac déformée dans l'espace des positions 72
2.3.1 Principe de correspondance dans le κ-espace de Minkowski 72
2.3.2 L'équation de Klein-Gordon déformée dans l'espace des positions . . 74
2.3.3 L'équation de Dirac déformée dans l'espace des positions 76
2.3.4 L'équation de continuité et la densité de courant 79

3 La mécanique analytique généralisée aux systèmes avec contraintes 81
3.1 Rappel de la mécanique analytique 81
3.1.1 Principe de moindre action et équations de Lagrange 82
3.1.2 Formalisme hamiltonien et crochets de Poisson 83
3.1.3 Quantification canonique 85
3.2 Le formalisme de Dirac et Bergmann 87
3.2.1 Lagrangiens singuliers en physique 87
3.2.2 Passage au formalisme hamiltonien et égalité faible 90
3.2.3 Algorithme de Dirac-Bergmann et contraintes secondaires 93
3.2.4 Contraintes de première et de deuxième classe 96
3.2.5 Contraintes de première classe comme générateurs de symétrie de jauge 97
3.2.6 Contraintes de deuxième classe comme origine du crochet de Dirac . 100
3.2.7 Symétrie de jauge et crochet de Dirac 104
3.2.8 Quantification canonique des systèmes avec contraintes 105
3.3 L'approche de Faddeev et Jackiw 110
3.3.1 Linéarisation du lagrangien par rapport aux vitesses 110
3.3.2 Principe de la méthode de Faddeev-Jackiw 112
3.3.3 Exemples d'application 115

4 La méthode des constantes d'intégration pour la détermination directe des crochets de Dirac 118
4.1 Motivation 119
4.2 Propriété fondamentale des constantes d'intégration 122
4.3 Méthode des constantes d'intégration (CI) 124
4.4 Choix des constantes d'intégration 127
4.5 Applications aux systèmes réguliers 130
4.5.1 Oscillateurs harmonique et isotonique 130
4.5.2 Particule dans un champ électrique constant 131
4.5.3 Particule dans un champ magnétique constant 132
4.6 Applications aux systèmes avec contraintes 133
4.6.1 Exemples de lagrangiens singuliers sans symétrie de jauge 133
4.6.2 Exemples de lagrangiens singuliers avec symétrie de jauge 136
4.7 Lagrangien de Hojman-Urrutia 139
4.7.1 Premier cas : ω est une variable 139
4.7.2 Deuxième cas : ω est une constante 141
4.8 Application en théorie des champs 141

4.8.1 Champ scalaire 142
4.8.2 Champ spinoriel 143
4.8.3 Le neutrino de Majorana 145
4.8.4 Champ vectoriel 147
4.9 La méthode des constantes d'intégration perturbée 148
4.10 Conclusion 152

Conclusion générale et perspectives **153**

Bibliographie **155**

Introduction générale

La relativité est la théorie de l'espace-temps et de la covariance par excellence. Dès son apparition sous sa forme restreinte en 1905 avec les travaux d'Einstein sur l'électrodynamique des corps en mouvement, et qu'elle a ensuite pris sa forme générale en 1915 afin de s'appliquer à la gravitation, elle a renversé toute notre conception de l'espace et du temps, et de leur relation avec la matière. Depuis, elle n'a pas cessé d'enchaîner les succès en expliquant et en prédisant des phénomènes de physiques.

La contribution majeure de la relativité restreinte est la réconciliation de la mécanique et l'électromagnétisme, en postulant l'invariance de la vitesse de la lumière dans le vide c et le principe de la covariance des lois de la nature. Elle a aussi attiré l'attention vers d'autres phénomènes liés aux changements de repères tels que la nature relative de la simultanéité des événements, la contraction des longueurs et la dilatation des durées.

La relation de dispersion énergie-impulsion $E^2 = \vec{p}^2c^2 + m_o^2c^4$ de la relativité restreinte, appelée aussi la relation d'Einstein, exprime l'énergie E d'une particule en fonction de sa masse m_o et son impulsion $\vec{p}$. Elle est à la base des équations d'ondes de Klein-Gordon et de Dirac de la mécanique quantique relativiste, et de la théorie quantique des champs qui permet d'étudier les processus de création et d'annihilation des particules élémentaires. L'accord parfait entre les mesures expérimentales et les résultats calculés par des théories basées sur la relation de dispersion montre que cette dernière est très efficace et qu'elle contient une grande part de vérité.

Cependant, la relativité restreinte n'est testée que pour des énergies très basses comparées aux énergies déployées dans certains processus astronomiques. On parle ici des rayons cosmiques qui traversent l'univers et arrivent sur terre avec des énergies très élevées par rapport à ce qu'on produit dans les accélérateurs de particules. En effet, d'après les prédictions des physiciens, Greisen, Zatsepine et Kouzmine (1966), il existe un seuil d'énergie, appelé la limite GZK, qu'aucun proton du rayonnement cosmique ne devrait dépasser une fois détecté sur terre, et cela à cause de leurs interactions avec les photons du fond diffus cosmologique qui remplissent tout l'espace interstellaire. Une expérience appelée AGASA menée au Japon a permis d'observer ce qui peut-être des rayons cosmiques ayant des énergies au-delà de la coupure GZK [40], ce qui pourrait être un signe que la relativité

restreinte ne s'applique pas aux énergies extrêmes [34, 35]. Mais récemment, d'autres observatoires tels que le détecteur HiRes (The High Resolution Fly's Eye) [41], l'observatoire astronomique Pierre-Auger [42] et le telescope array (TA) [43] semblent quand à eux être en accord avec la limite GZK dans leurs observations, ce qui constitue une remise en cause des résultats de l'expérience AGASA.

D'un autre côté, les différentes approches de la gravité quantique s'accordent sur le fait que l'échelle de Planck est la frontière à partir de laquelle l'espace-temps doit être quantifié pour devenir granulaire. Ici se pose la question fondamentale : tous les observateurs s'accorderont-ils sur la valeur de la longueur de Planck l_p ? A priori, la réponse est non, vu le phénomène de contraction des longueurs bien connu en relativité restreinte. Il y a donc une contradiction entre l'idée d'une longueur de Planck qui doit être le quantum indivisible de l'espace et la relativité restreinte qui attribue un caractère relatif à la mesure des longueurs. On a exactement la même chose en ce qui concerne le temps et l'énergie de Planck (t_p et E_p). Mais, ce paradoxe reste purement théorique et entre dans le cadre des expériences de pensée puisque les moyens actuels ne permettent pas de sonder l'échelle de Planck.

Dans le but de revisiter et réviser les principes fondateurs de la relativité restreinte, Giovanni Amelino-Camelia, physicien italien membre de la communauté de la gravité quantique, a élaboré une théorie de relativité spéciale déformée [34, 35, 36, 37, 38, 39], appelée aussi doublement restreinte (DSR1), en postulant un troisième principe selon lequel l'échelle de Planck est universelle, en plus des deux principes de base de la relativité restreinte qui restent intacts. Les conséquences sont les modifications apportées aux équations de la relativité einsteinienne, en particulier, la relation de dispersion énergie-impulsion.

Lee Smolin connu pour sa contribution à la théorie de la gravité à boucles (QLG), et João Magueijo cosmologue réputé pour sa théorie d'une vitesse variable de la lumière, ont trouvé un autre moyen de réaliser les trois principes de la relativité spéciale déformée dans une nouvelle théorie appelée DSR2 [28, 29] plus claire et moins compliquée que la DSR1 de Giovanni Amelino-Camelia. Cependant, ces théories sont critiquées par certains scientifiques en disant qu'elles ne sont que des transformations de variables et qu'elles sont incohérentes, malgré le fait que leurs prédictions diffèrent de celles de la relativité restreinte.

Les crochets fondamentaux du κ-espace des phases de Minkowski qui est à la base de la relativité spéciale déformée, et d'une façon plus générale, les commutateurs de la mécanique quantique non commutative ne peuvent pas être obtenus à partir des crochets de Poisson canoniques. En effet, ils peuvent être interprétés comme une conséquence de transformations non canoniques ou comme un résultat de la mécanique analytique généralisée aux systèmes hamiltoniens avec contraintes, précisément, comme des crochets de Dirac [11].

La mécanique analytique dans sa version de Lagrange et Hamilton est la forme la plus belle de la mécanique classique, vu qu'elle est très puissante dans sa cohérence et

l'élégance de son formalisme mathématique. Elle repose sur le principe de moindre action analogue au principe de moindre temps de Fermat connu en optique géométrique, ce qui lui donne parfois, une dimension métaphysique. Elle est surtout indispensable pour faire le passage de la mécanique classique à la théorie quantique à l'aide de la quantification canonique (formulations de Schrödinger et Heisenberg) ou des intégrales de chemins (formulation de Feynman). Cependant, la mécanique analytique dans cette version standard reste impuissante devant les difficultés liées à la formulation hamiltonienne des systèmes avec contraintes. Ces derniers sont décrits par des lagrangiens singuliers ce qui rend les crochets de Poisson sans grand intérêt.

Dans le but de faire une généralisation de la dynamique hamiltonienne aux systèmes qui présentent des singularités, Dirac [11] et Bergmann [86] ont élaboré un algorithme itératif en imposant certaines conditions de consistance sur les contraintes, et le premier résultat fut que les contraintes primaires peuvent générer d'autres contraintes secondaires. Ces dernières prises ensemble sont ensuite classées en première et en deuxième classe. Dirac a montré le lien étroit entre les contraintes de première classe et les symétries de jauge que peut avoir un système physique. Dans le cas des contraintes de deuxième classe, il a pu définir un crochet qui porte son nom, capable de bien remplacer le crochet de Poisson quand le lagrangien est singulier, permettant ainsi d'avoir une formulation hamiltonienne cohérente d'où la possibilité de faire appel à la quantification canonique malgré la présence des contraintes.

Cette manière de procéder n'est pas la seule car Faddeev et Jackiw [87] ont introduit en 1988 une autre approche souvent beaucoup plus simple et moins coûteuse en terme de temps et de concepts, qui redonne les mêmes crochets de Dirac. En effet, partant d'un lagrangien linéarisé par rapport aux vitesses, ils obtiennent un système d'équations de premier ordre, et après inversion de la matrice symplectique, ils aboutissent aux crochets de Dirac sans aucune classification de contraintes.

L'objectif de cette thèse est d'abord d'étudier dans un premier temps les implications et les modifications apportées par la théorie de la relativité spéciale déformée à la mécanique quantique relativiste en essayant de répondre à la question :
* Quelle serait la forme des équations de Dirac et de Klein-Gordon déformées dans l'espace des positions en DSR et quelles seront leurs implications physiques ?

Nous allons par la suite, nous intéresser aux systèmes hamiltoniens avec contraintes dans le but d'appréhender le formalisme de Dirac-Bergmann et la méthode de Faddeev-Jackiw. Par la suite, en se plaçant dans la situation où les équations du mouvement sont exactement solubles, nous allons étudier la problématique suivante :
* Est-il possible d'utiliser la solution analytique (générale) des équations d'Euler-Lagrange pour faire une quantification canonique simple et directe ?

Outre, nous nous interrogerons sur le lien éventuel entre le formalisme non commutatif

et les crochets de Dirac des systèmes singuliers, et sur le rôle des transformations non canoniques dans la déformation des crochets de Poisson. Autrement dit, nous aborderons la question :
* Quel est le lien de la mécanique quantique non commutative et la DSR avec les transformations non canoniques et les systèmes hamiltoniens avec contraintes ?

Afin de bien mener à bout la rédaction de ce manuscrit, nous allons organiser notre travail en quatre chapitres comme suit : Le premier chapitre sera un rappel de la relativité spéciale déformée en insistant sur le rôle joué par la théorie des groupes de Lie dans sa construction et sur son analogie avec la relativité restreinte. Le deuxième chapitre sera consacré à l'équation de Dirac déformée dans l'espace des impulsions et dans l'espace des positions, en se préoccupant de satisfaire les considérations de la relativité spéciale déformée. Dans le troisième chapitre, nous allons présenter les approches de Dirac et de Faddeev-Jackiw mises au point dans le but de surmonter les problèmes liés à la quantification des systèmes avec contraintes. Dans le quatrième et dernier chapitre, nous allons discuter une autre alternative aux approches précédentes dans le cas où le système est exactement soluble, en essayant d'exploiter les constantes d'intégration afin de déterminer les crochets nécessaires à la quantification canonique.

Chapitre 1

Introduction à la relativité spéciale déformée (DSR)

1.1 Groupes de Lie de transformations continues

La notion de groupe date de 17 ^{ieme} siècle avec les travaux de deux mathématiciens : le français Evariste Galois (1811-1832) et le norvégien Neils Henrik Abel (1802-1829) sur la résolution des équations algébriques par la méthode des radicaux en faisant appel aux groupes des permutations. L'extension de l'utilisation de la théorie des groupes est due à un autre mathématicien norvégien, Sophus Lie (1842-1899) grâce à ses travaux sur les groupes de transformations continues et les symétries des équations différentielles.

1.1.1 Algèbres de Lie

1.1.1-a. Définition d'une algèbre de Lie

Une algèbre de Lie est un espace vectoriel L sur le corps $\mathbb{K}$ muni d'une deuxième loi interne notée $[\,,\,]$ et appelée crochet de Lie, vérifiant les conditions suivantes : $\forall\, X, Y, Z \in L$ et $\forall a, b \in \mathbb{K}$,

1. $[X, Y] = -[Y, X] \Rightarrow [X, X] = 0$ (*Antisymétrie*) ;
2. $[X, aY + bZ] = a[X, Y] + b[X, Z]$ (*La linéarité*) ;
3. $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$ (*Identité de Jacobi*).

Les deux propriétés (1.) et (2.) impliquent que

$$\forall\, X, Y, Z \in L \qquad a, b \in \mathbb{K} \qquad [aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z].$$

Exemples :

- L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni du produit vectoriel habituel est une algèbre de Lie.
- L'ensemble des matrices $n \times n$ ($n \in \mathbb{N}$) à éléments dans un corps $\mathbb{K}$ noté par fois $gl(n, \mathbb{K})$ constitue une algèbre de Lie dont le crochet est le commutateur

$$\forall A, B \in gl(n, \mathbb{K}) \quad [A, B] = AB - BA.$$

On a le même cas pour l'algèbre des opérateurs linéaires dans un espaces vectoriel. En effet, on peut définir le commutateur de deux opérateurs linéaires f et g par :

$$[f, g] = f \circ g - g \circ f.$$

1.1.1-b. Constantes de structure d'une algèbre de Lie

Soit L une algèbre de Lie de dimension finie r, et soit$\{e_i\}$, $i = 1, 2, ..., r$ une base de cette dernière. On appelle les relations de commutation les r^2 crochets de Lie $[e_i, e_j]$, $i, j \in \{1, 2, 3, ...r\}$. Puisque le crochet de Lie est une loi interne dans L, alors $[e_i, e_j]$ se décompose comme suit :

$$[e_i, e_j] = \sum_{k=1}^{r} c_{ijk} e_k, \tag{1.1}$$

où les c_{ijk} sont appelés les constantes de structure de l'algèbre de Lie L.

Remarques :

- Les constantes de structure d'une l'algèbre de Lie dépendent du choix de la base.
- L'antisymétrie du crochet de Lie implique que $c_{ijk} = -c_{jik}$, et en particulier $c_{iik} = 0$.
- L'identité de Jacobi vérifiée par le crochet de Lie implique que

$$\sum_{l=1}^{r} c_{ijl} c_{lkh} + c_{jkl} c_{lih} + c_{kil} c_{ljh} = 0 \qquad \forall\, i, j, h, k \in \{1, 2, 3, .., r\}. \tag{1.2}$$

Exemple :

L'ensemble des matrices hermitiennes 2×2 à trace nulle est une $\mathbb{R}$-algèbre de Lie de dimension trois (3). Si on choisit comme base de cette algèbre les trois matrices

$$e_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad e_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad e_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix},$$

les relations de commutation de cette algèbre vont être

$$[e_1, e_2] = e_1\, e_2 - e_2\, e_1 = e_3 \quad ; \quad [e_2, e_3] = e_1 \quad ; \quad [e_3, e_1] = e_2,$$

d'où les seules constantes de structure non nulles

$$c_{123} = -c_{213} = 1 \qquad c_{231} = -c_{321} = 1 \qquad c_{312} = -c_{132} = 1.$$

1.1.2 Groupes de Lie de transformations de $\mathbb{R}^n$

1.1.2-a. Définition d'un groupe

Soit un ensemble $G = \{g_1, g_2, g_3, g_4, ...\}$ muni d'une loi de composition interne, qui est une application $G \times G \longrightarrow G$ qui associe au couple $(g_1, g_2) \in G$, un élément de G qu'on va noter multiplicativement $g_1\, g_2$. L'ensemble G a la structure d'un groupe si les conditions suivantes sont vérifiées :

1. $\forall\ g_1, g_2, g_3 \in G, \quad g_1\,(g_2\,g_3) = (g_1\,g_2)\,g_3$ (*associativité*) ;
2. $\exists!\ e \in G$ tel que $\quad e\,g_1 = g_1\,e = g_1 \quad \forall\ g_1 \in G$ (*élément neutre*) ;
3. $\forall\ g_1 \in G$, $\exists!\ g_1^{-1} \in G$ tel que $g_1\,g_1^{-1} = g_1^{-1}\,g_1 = e$ (*élément symétrique*).

Dans le cas où $g_1\,g_2 = g_2\,g_1$, pour $g_1, g_2 \in G$, ce groupe est dit abélien, et sa loi de composition interne est dite commutative (souvent notée $(+)$).

Remarques :

- Le nombre d'éléments d'un groupe est appelé l'ordre de ce groupe. Il peut être fini ou infini. Dans le deuxième cas, le groupe est soit continu, soit discret (dénombrable).
- Il se peut qu'il existe un sous-ensemble $E = \{g_\alpha, g_\beta, g_\gamma, ...\}$ d'un groupe G tel que tous les éléments de ce denier peuvent être obtenus par composition des éléments de E. Dans ce cas, les $g_\alpha, g_\beta, g_\gamma, ...$ sont appelés les générateurs du groupe G. Le groupe G est cyclique s'il possède un seul générateur.

1.1.2-b. Transformations et groupe de transformations

On appelle transformation de l'ensemble E une application bijective de $E \longrightarrow E$. Par exemple, l'application identité de E définie par $Id_E : E \longrightarrow E$ où $x \mapsto x$, est une transformation de E.

Maintenant, soit T un ensemble de transformations d'un ensemble E. Si T muni de la loi de composition des fonctions possède la structure d'un groupe, alors il est appelé groupe de transformations de l'ensemble E.

Exemples :

1. L'ensemble de toutes les transformations de l'ensemble E, noté $Transf(E)$, est un groupe de transformations de E tandis que les autres groupes de transformations de E sont des sous-groupes de ce dernier.
2. L'ensemble $A = \{f_{n,m} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2\ ;\ (x,y) \longmapsto (x+n, y-m)\ \ \backslash n, m \in \mathbb{Z}\}$ est un groupe de transformations de $\mathbb{R}^2$. En effet, $\forall n, m, n', m' \in \mathbb{Z}$, $f_{n,m} \circ f_{n',m'} = f_{n+n',m+m'} \in A$, $Id_{\mathbb{R}^2} = f_{0,0} \in A$, $f_{n,m}^{-1} = f_{-n,+m} \in A$ et l'associativité de la composition des fonctions assure l'associativité dans A.

1.1.2-c. Les groupes de transformations continues de $\mathbb{R}^n$ à plusieurs paramètres

Soit le domaine D appartenant à l'ensemble $\mathbb{R}^n$. Un groupe de transformations continues $\mathcal{T}$ de cet ensemble D est un groupe de transformations f_a de D où les r paramètres réels $a = (a_1, a_2, ..., a_r)$ varient d'une manière **continue** dans un sous-ensemble $S \subset \mathbb{R}^r$ appelé espace des paramètres. Autrement dit, nos transformations sont de la forme :

$$\begin{aligned} f_a\ :\ & D \longrightarrow D \\ & x \longmapsto x' = f_a(x) = f(x,a). \end{aligned} \tag{1.3}$$

Comme $x,\ x' \in \mathbb{R}^n$ et $a \in \mathbb{R}^r$, ces transformations s'écrivent explicitement

$$x' = f(x,a) \quad \Longleftrightarrow \quad x'_i = f_i(x_1, x_2, ..., x_n; a_1, a_2, ..., a_r) \quad i = 1, 2, ..., n. \tag{1.4}$$

Puisqu'il s'agit d'un groupe de transformations, les propriétés qui en découlent directement sont :

1. $\forall\, f_a, f_b \in \mathcal{T}$, $\exists c \in S$ tel que $f_b \circ f_a = f_c$. Cela veut dire que c est fonction de a et b qu'on peut écrire

$$c = \varphi(a,b) \quad \Longleftrightarrow \quad c_\alpha = \varphi_\alpha(a_1, a_2, ..., a_r; b_1, b_2, ..., b_r) \qquad \alpha = 1, 2, ..., r.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \qquad (f_b \circ f_a)(x) = f_c(x) \qquad \Longrightarrow \qquad f(f(x,a),b) = f(x, \varphi(a,b)). \quad (1.5)$$

2. $\exists a^0 \in S$ tel que $f_{a^0} = Id_{\mathbb{R}^n} \implies f_{a^0}(x) = f(x, a^0) = x$. Cette relation traduit l'existence de l'élément neutre. Il s'en suit que $\forall x \in \mathbb{R}^n$,

$$(f_{a^0} \circ f_a)(x) = (f_a \circ f_{a^0})(x) = f_a(x) \quad \Longrightarrow \quad \varphi(a, a^0) = \varphi(a^0, a) = a. \qquad (1.6)$$

3. $\forall\, f_a \in \mathcal{T}$ $\exists \overline{a} \in S$ tel que $f_a^{-1} = f_{\bar{a}} \in \mathcal{T}$. Cela implique que $\forall x \in \mathbb{R}^n$,

$$(f_a \circ f_{\bar{a}})(x) = (f_{\bar{a}} \circ f_a)(x) = f_{a^0}(x) = x \quad \Longrightarrow \quad \varphi(\bar{a}, a) = \varphi(\bar{a}, a) = a^0. \qquad (1.7)$$

   Les paramètres $\overline{a}$ sont des fonctions de a qu'on va écrire implicitement $\overline{a} = \chi(a)$.

4. Pour $f_a, f_b, f_c \in \mathcal{T}$, l'associativité de la loi de la composition de fonctions implique que :

$$f_c \circ (f_b \circ f_a) = (f_c \circ f_b) \circ f_a \quad \Longrightarrow \quad \varphi(\varphi(a,b), c) = \varphi(a, \varphi(b,c)). \qquad (1.8)$$

Si en plus, les fonctions $f(x,a)$, $\varphi(a,b)$ et $\chi(a)$ définies auparavant, sont des fonctions analytiques admettant des dérivées à tout ordre par rapport à leurs arguments, ce groupe de transformations continues $\mathcal{T}$ est un groupe de Lie de transformations à r paramètres.

Exemple :

L'ensemble des applications $A = \{T_{\alpha,\beta} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ x \longmapsto \frac{1}{\alpha}x + \beta \quad \backslash(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}\}$ est un groupe de Lie de transformations à deux paramètres α et β. En effet, $\forall\, T_{\alpha,\beta}, T_{\gamma,\delta} \in A$:

$$T_{\gamma,\delta} \circ T_{\alpha,\beta} = T_{\alpha\gamma, \frac{\beta}{\gamma}+\delta} \in A \qquad T_{\alpha,\beta}^{-1} = T_{\frac{1}{\alpha}, -\alpha\beta} \in A \qquad T_{1,0} = Id_{\mathbb{R}} \in A.$$

En plus les fonctions $f(x,\alpha,\beta) = \frac{1}{\alpha}x + \beta$, $\varphi_1(\alpha,\beta;\gamma,\delta) = \alpha\gamma$, $\varphi_2(\alpha,\beta;\gamma,\delta) = \frac{\beta}{\gamma} + \delta$, $\chi_1(\alpha,\beta) = \frac{1}{\alpha}$ et $\chi_2(\alpha,\beta) = -\alpha\beta$ sont analytiques pour $x \in \mathbb{R}$; $(\alpha,\gamma) \in (\mathbb{R}^*)^2$ et $(\beta,\delta) \in \mathbb{R}^2$.

1.1.2-d. Transformation infinitésimale et algèbre de Lie

Soit un groupe de Lie de transformations à r paramètres dont les équations sont

$$x' = f(x,a) \quad \Longleftrightarrow \quad x'_i = f_i(x_1, x_2, ..., x_n; a_1, a_2, ..., a_r) \qquad i = 1, 2, ..., n. \qquad (1.9)$$

Faisons l'hypothèse que la transformation identité correspond à $a^0 = 0$, ce qui veut dire que $f(x,0) = x$. Si ce n'est pas le cas, il suffit de redéfinir la transformation en remplaçant $f(x,a)$ par $\widetilde{f}(x,a) = f(x, a + a^0)$ pour avoir l'égalité $\widetilde{f}(x,0) = f(x, 0 + a^0) = f(x,a^0) = x$.

À présent, supposons que l'ensemble des paramètres a sont infinitésimaux ($|a_\alpha| \ll 1,\ \alpha = 1, 2, .., r$). Le développement de Taylor de la fonction $f(x, a)$ à l'ordre un au voisinage de 0 par rapport à l'argument a, nous permet d'avoir l'approximation

$$x'_i = f_i(x, a) \cong f_i(x, 0) + \sum_{\alpha=1}^{r} a_\alpha \frac{\partial f_i}{\partial a_\alpha}\Big|_{a=0} \qquad i = 1, 2, ..., n. \tag{1.10}$$

Si on pose $\xi_{i\alpha}(x) = \frac{\partial f_i}{\partial a_\alpha}|_{a=0}$ et vu que $f(x, 0) = x$, la transformation infinitésimale recherchée aura la forme

$$x'_i = x_i + \sum_{\alpha=1}^{r} a_\alpha \xi_{i\alpha} \qquad i = 1, 2, ..., n. \tag{1.11}$$

Comme $\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij}$, cette transformation peut-être réécrite sous la forme

$$x'_i = x_i + \sum_{\alpha=1}^{r} a_\alpha \sum_{j=1}^{n} \xi_{j\alpha} \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \left(1 + \sum_{\alpha=1}^{r} a_\alpha \sum_{j=1}^{n} \xi_{j\alpha} \frac{\partial}{\partial x_j}\right) x_i \qquad i = 1, 2, ..., n, \tag{1.12}$$

ce qui va nous permettre d'en déduire l'ensemble des r opérateurs différentiels

$$X_\alpha = \sum_{j=1}^{n} \xi_{j\alpha} \frac{\partial}{\partial x_j} \qquad \alpha = 1, 2, .., r, \tag{1.13}$$

qui sont les opérateurs (générateurs) infinitésimaux de notre groupe de Lie de transformations continues. Maintenant, la transformation infinitésimale (1.11) va prendre la forme

$$x'_i = x_i + \sum_{\alpha=1}^{r} a_\alpha X_\alpha x_i \qquad \Longleftrightarrow \qquad x'_i = (1 + \sum_{\alpha=1}^{r} a_\alpha X_\alpha) x_i \tag{1.14}$$

et la variation infinitésimale $\delta x_i = x'_i - x_i$ sera donnée par

$$\delta x_i = \sum_{\alpha=1}^{r} a_\alpha \xi_{i\alpha} \quad \Longleftrightarrow \quad \delta x_i = \sum_{\alpha=1}^{r} a_\alpha\, X_\alpha x_i \qquad i = 1, 2, ..., n. \tag{1.15}$$

Dans le cas d'une fonction differentiable $F(x) = F(x_1, x_2, ..., x_n)$, la variation infinitésimale est

$$\delta F = \sum_{i=1}^{n} \delta x_i \frac{\partial F(x)}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha=1}^{r} a_\alpha \xi_{i\alpha} \frac{\partial F(x)}{\partial x_i} \quad \Rightarrow \quad \delta F = \sum_{\alpha=1}^{r} a_\alpha\, X_\alpha F(x). \tag{1.16}$$

Comme les invariants d'un groupe de Lie sont des quantités $F(x)$ telles que $\delta F = 0$, l'équation précédente nous permet de conclure que ces invariants doivent vérifier les équations aux dérivées partielles

$$X_\alpha F(x) = 0 \qquad \alpha = 1, 2, .., r. \tag{1.17}$$

A présent, il est possible de parler du commutateur (crochet) de deux opérateurs infinitésimaux X_α et X_β donné par

$$[X_\alpha, X_\beta] = X_\alpha X_\beta - X_\beta X_\alpha \qquad \alpha, \beta \in \{1, 2, ..., r\}.$$

Comme nos r opérateurs infinitésimaux sont définis par les relations $X_\alpha = \sum_{i=1}^{n} \xi_{i\alpha} \frac{\partial}{\partial x_i}$ et $X_\beta = \sum_{j=1}^{n} \xi_{j\beta} \frac{\partial}{\partial x_j}$, un calcul simple montre que

$$[X_\alpha, X_\beta] = \sum_{i,j=1}^{n} \left(\xi_{i\alpha} \frac{\partial \xi_{j\beta}}{\partial x_i} - \xi_{i\beta} \frac{\partial \xi_{j\alpha}}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \qquad \alpha, \beta \in \{1, 2, ..., r\}. \tag{1.18}$$

On démontre que les commutateurs de ces opérateurs infinitésimaux ont les propriétés suivantes[1] :

1. $[X_\alpha, X_\beta] = -[X_\beta, X_\alpha]$
2. $[[X_\alpha, X_\beta], X_\gamma] + [[X_\beta, X_\gamma], X_\alpha] + [[X_\gamma, X_\alpha], X_\beta] = 0$
3. $[X_\alpha, X_\beta] = \sum_{\lambda=1}^{r} c_{\alpha\beta\lambda} X_\lambda$, où les $c_{\alpha\beta\lambda}$ sont les constantes de structure du groupe de Lie de transformations, nulles si le groupe de transformations est abélien.

Ces propriétés nous permettent de construire l'algèbre de Lie de notre groupe de Lie de transformations comme suit : on prend l'ensemble de tous les opérateurs qui sont des combinaisons linéaires de la forme $\sum_{\alpha=1}^{r} a_\alpha X_\alpha$ où les a_α sont des coefficients réels, et on le munit de loi d'addition des opérateurs et celle de la multiplication d'un nombre réel par un opérateur de sorte à avoir un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension r dont la base est formée par l'ensembles des opérateurs infinitésimaux $\{X_\alpha\}$, $\alpha = 1, 2, ..., r$. Ensuite, on munit cette cet espace vectoriel du commutateur des opérateurs pour en faire une algèbre de Lie de notre groupe de Lie de transformations.

Exemple : Soit le groupe de Lie de transformations de l'ensemble $(\mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}^*)$ dépendant des deux paramètres $(a, b) \in (\mathbb{R} - \{-1\})^2$ dont les équations sont :

$$\begin{cases} x' = x^{1+a} \\ y' = \frac{1}{(1+a)(1+b)} y \end{cases}$$

Pour a et b infinitésimaux, on a le développement limité suivant :

$$\begin{cases} x' = x^{1+a} \\ y' = \frac{1}{(1+a)(1+b)} y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x' = x e^{a Log(x)} \\ y' = (1+a)^{-1}(1+b)^{-1} y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x' = x(1 + a\, Log(x) + ...) \\ y' = (1 - a + ...)(1 - b + ...) y \end{cases}$$

d'où la transformation et les opérateurs infinitésimaux ci-dessous.

$$\begin{cases} x' = x + a\, x\, Log(x) \\ y' = y - a\, y - b\, y \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} X_a = x\, Log(x) \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y} \\ X_b = -y \frac{\partial}{\partial y} \end{cases} .$$

1. : Voir les ouvrages [1, 5].

Il est facile de voir que $[X_a, X_b] = 0$, preuve que ce groupe est bien abélien. Les invariants $F(x, y)$ de ce groupe doivent satisfaire le système d'équations

$$\left\{ \begin{array}{l} X_a F = 0 \\ X_b F = 0 \end{array} \right. \qquad \Longrightarrow \qquad \left\{ \begin{array}{l} x\, Log(x) \frac{\partial F}{\partial x} - y\, \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \\ -y\, \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \end{array} \right.$$

dont la seule solution possible est la fonction constante $F(x, y) = cst$.

1.1.3 Groupes de Lie à un seul paramètre

1.1.3-a. Propriétés des transformations à un seul paramètre

Soit le domaine $D \in \mathbb{R}^n$ dont les éléments sont les $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$. Le groupe de Lie de transformations à un paramètre ε est le groupe de transformations de D dont les équations sont

$$x' = f(x, \varepsilon) \quad \Longleftrightarrow \quad x'_i = f_i(x, \varepsilon) = f_i(x_1, x_2, ..., x_n; \varepsilon) \qquad x,\, x' \in D \tag{1.19}$$

où le paramètre ε peut prendre ses valeurs de manière continue dans l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Donc, pour $\varepsilon, \delta \in I$, il existe $\gamma = \phi(\varepsilon, \delta)$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \qquad f(f(x, \varepsilon), \delta) = f(x, \phi(\varepsilon, \delta)). \tag{1.20}$$

Supposons que $\varepsilon^0 = 0$ correspond à l'application identité, et $\bar{\varepsilon} = \varepsilon^{-1}$ est la valeur de notre paramètre relative à la transformation inverse de la transformation $x' = f(x, \varepsilon)$. Des résultats du paragraphe (§*1.1.2-c*), on déduit les relations

$$\phi(\varepsilon, 0) = \phi(0, \varepsilon) = \varepsilon \qquad \phi(\varepsilon, \varepsilon^{-1}) = \phi(\varepsilon^{-1}, \varepsilon) = 0 \qquad \phi(\varepsilon, \phi(\delta, \gamma)) = \phi(\phi(\varepsilon, \delta), \gamma). \tag{1.21}$$

Comme $f_i(x, 0) = x_i$, la transformation infinitésimale à un paramètre aura la forme

$$x'_i = x_i + \varepsilon \xi_i(x) \qquad \Rightarrow \qquad x'_i = \left(1 + \varepsilon \sum_{j=1}^{n} \xi_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \right) x_i \tag{1.22}$$

où $\xi_i(x) = \frac{\partial f_i(x,\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\big|_{\varepsilon=0}$. On en déduit que les groupes à un paramètre sont abéliens dont le générateur (opérateur infinitésimal) est l'opérateur différentiel

$$X = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x)\, \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \Longrightarrow \quad X x_i = \xi_i(x). \tag{1.23}$$

1.1.3-b. Le premier théorème fondamental de Lie

Soit le groupe de Lie de transformations à un paramètre

$$x' = f(x, \varepsilon) \quad \Longleftrightarrow \quad x'_i = f_i(x, \varepsilon) = f_i(x_1, x_2, ..., x_n; \varepsilon) \qquad x,\, x' \in D \quad \varepsilon \in I \tag{1.24}$$

dont la transformation infinitésimale est donnée par la relation

$$x' = x + \varepsilon\xi_(x) \quad \Longleftrightarrow \quad x'_i = x_i + \varepsilon\xi_i(x) \qquad x,\, x' \in D \quad \varepsilon \in I.$$

Le premier théorème fondamental de Lie indique qu'il existe une paramétrisation

$$\tau(\varepsilon) = \int_0^{\varepsilon} \Gamma(\varepsilon)\, d\varepsilon = \int_0^{\varepsilon} \frac{\partial\phi(a,b)}{\partial b}\Big|_{(a,b)=(\varepsilon^{-1},\varepsilon)}\, d\varepsilon \tag{1.25}$$

telle que les transformations (1.24) soient solution du système d'équations différentielles

$$\frac{dx'}{d\tau} = \xi(x') \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{dx'_i}{d\tau} = \xi_i(x') \quad i = 1, 2, ..., n \qquad \text{avec} \qquad x'(0) = x. \tag{1.26}$$

Preuve : On va faire la démonstration en trois étapes :

1. A l'aide des relations (1.20) et (1.21), on obtient

$$f(x', \phi(\varepsilon^{-1}, \varepsilon + \Delta\varepsilon)) = f(f(x,\varepsilon), \phi(\varepsilon^{-1}, \varepsilon + \Delta\varepsilon)) = f\big(x, \phi(\varepsilon, \phi(\varepsilon^{-1}, \varepsilon + \Delta\varepsilon))\big)$$
$$= f(x, \phi(\phi(\varepsilon, \varepsilon^{-1}), \varepsilon + \Delta\varepsilon)) = f(x, \phi(0, \varepsilon + \Delta\varepsilon)) = f(x, \varepsilon + \Delta\varepsilon).$$

2. Maintenant, supposons que $\Delta\varepsilon$ est infiniment petit. Dans ce cas, on aura

$$\phi(\varepsilon^{-1}, \varepsilon + \Delta\varepsilon) = \phi(\varepsilon^{-1}, \varepsilon)_{=0} + \Delta\varepsilon \frac{\partial\phi(a,b)}{\partial b}\Big|_{(a,b)=(\varepsilon^{-1},\varepsilon)} = \Gamma(\varepsilon)\, \Delta\varepsilon.$$

3. A partir des deux résultats précédents, on tire la relation

$$f(x, \varepsilon + \Delta\varepsilon) = f(x', \phi(\varepsilon^{-1}, \varepsilon + \Delta\varepsilon)) = f(x', \phi(\varepsilon^{-1}, \varepsilon) + \Gamma(\varepsilon)\, \Delta\varepsilon)$$
$$= f(x', \phi(\varepsilon^{-1}, \varepsilon)) + \Gamma(\varepsilon)\, \Delta\varepsilon \frac{\partial f(x', \delta)}{\partial \delta}\Big|_{\delta=0}.$$

Puisque $f(x', \phi(\varepsilon^{-1}, \varepsilon)) = f(x', 0) = x'$ et $\frac{\partial f(x',\delta)}{\partial\delta}\big|_{\delta=0} = \xi(x')$, on aboutit à l'égalité

$$f(x, \varepsilon + \Delta\varepsilon) = x' + \Gamma(\varepsilon)\, \Delta\varepsilon\, \xi(x') = f(x, \varepsilon) + \Gamma(\varepsilon)\, \Delta\varepsilon\, \xi(x'),$$

d'où on en déduit que

$$\frac{1}{\Gamma(\varepsilon)} \frac{dx'}{d\varepsilon} = \lim_{\Delta\varepsilon \longrightarrow 0} \frac{f(x, \varepsilon + \Delta\varepsilon) - f(x, \varepsilon)}{\Gamma(\varepsilon)\Delta\varepsilon} = \xi(x').$$

Comme $\tau = \int_0^{\varepsilon} \Gamma(\varepsilon)\, d\varepsilon \Longrightarrow d\tau = \Gamma(\varepsilon)\, d\varepsilon$, on aura finalement le résultat

$$\frac{dx'}{d\tau} = \xi(x') \qquad\qquad C.Q.F.D$$

Le premier théorème fondamental de Lie montre que la transformation infinitésimale contient l'information essentielle qui determine le groupe de Lie de transformations à un paramètre. Puisque le système différentiel (1.26) est invariant sous une translations en τ, il possible de reparamétriser un groupe donné en terme du paramètre τ de telle sorte que pour les valeurs τ_1 et τ_2 de ce paramètre, la loi de composition devient $\phi(\tau_1, \tau_2) = \tau_1 + \tau_2$.

Exemple : Soit le groupe de transformations de $\mathbb{R}^2$ dont les équations sont

$$\begin{cases} x' = x\, e^{\varepsilon y} \\ y' = (\varepsilon + 1)\, y \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x' \simeq x + \varepsilon\, xy \\ y' \simeq y + \varepsilon\, y \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad X = xy\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$$

On a la loi de composition $\phi(\varepsilon, \delta) = \varepsilon + \delta + \varepsilon\delta$, l'élément neutre $\varepsilon^0 = 0$ et l'élément inverse $\varepsilon^{-1} = -\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$. Le paramètre τ peut être calculé comme suit :

$$d\tau = \frac{\partial \phi(a,b)}{\partial b}|_{(\varepsilon^{-1},\varepsilon)}\, d\varepsilon = \frac{1}{1+\varepsilon}\, d\varepsilon \qquad \Longrightarrow \qquad \tau = \ln(1+\varepsilon)$$

Avec ce nouveau paramètre, les transformations de ce groupe prennent la forme

$$\begin{cases} x' = x\, e^{y(e^{\tau}-1)} \\ y' = e^{\tau}\, y \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \frac{dx'}{d\tau} = x'y' \\ \frac{dy'}{d\tau} = y' \end{cases}$$

1.2 Rappels sur le groupe de Lorentz et la relativité restreinte

Avec la naissance de la théorie de la relativité restreinte (1905), notre conception de l'espace et du temps a changé radicalement et les principes de la physique aussi. Dorénavant, le temps et l'espace sont devenus relatifs et inséparables de telle sorte que toutes les lois de la physique doivent essayer au maximum d'attribuer aux variables spatiales et temporelles des rôles similaires. De plus, le groupe de Galilée de la mécanique newtonienne doit être remplacé par le groupe de Lorentz. Ce dernier contient les rotations spatiales et les transformations de Lorentz spéciales relatives au changement de repères inertiels. Le principe de la relativité restreinte impose aussi l'invariance de toutes les lois de la physique sous l'action de ce groupe.

1.2.1 Cinématique et dynamique relativistes

1.2.1-a. Transformation de Lorentz et loi de composition des vitesses

Après l'échec de la mécanique classique et son impuissance devant les problèmes rencontrés au début du siècle précédent, Einstein a énoncé ces deux postulats qui vont servir de base pour formuler sa théorie de la relativité restreinte :

1. Toutes les lois de la physique ont la même forme dans tous les référentiels Galiléens.

2. La célérité de la lumière dans le vide c a la même valeur dans tous les référentiels Galiléens.

Il est évident que la transformation de Galilée de la mécanique classique viole ces principes vu la loi de composition des vitesses qui en découle, et c'est pour cela que la transformation propre à la relativité restreinte sera la transformation de Lorentz. Donc, si le repère (R') dont les axes sont $(O'X'Y'Z')$, se déplace en translation uniforme selon l'axe (OX) par rapport au repère (R) dont les axes sont $(OXYZ)$, avec une vitesse d'entraînement constante v_e , un point occupant la position (x, y, z) à l'instant t par rapport au repère (R), sera vu dans le repère R' avec les coordonnées (x', y', z') à l'instant t' liées par la transformation de Lorentz

$$\left\{\begin{array}{l} x' = \gamma(x - v_e t) \\ t' = \gamma(t - \frac{v_e}{c^2}x) \\ y' = y \quad z' = z \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x = \gamma(x' + v_e t') \\ t = \gamma(t' + \frac{v_e}{c^2}x') \\ y = y' \quad z = z' \end{array}\right. \tag{1.27}$$

où c désigne la célérité de la lumière dans le vide, et $\gamma = (1 - \frac{v_e^2}{c^2})^{-\frac{1}{2}} \geq 1$, car $v_e < c$. Cette transformation correspond au cas où les deux repères coïncident à l'instant $t = t' = 0$. Si on fait tendre $c \longrightarrow \infty$, on obtiendra tout simplement la transformation de Galilée. L'expression de la transformation de Lorentz ci-dessus peut être simplifiée en remplaçant la vitesse d'entraînement v_e par la rapidité θ définie par la relation

$$\cosh\theta = \left(1 - \frac{v_e^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \gamma \qquad \Longrightarrow \qquad \sinh\theta = \frac{v_e}{c}\left(1 - \frac{v_e^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{v_e}{c}\,\gamma. \tag{1.28}$$

Avec ce nouveau paramètre, la transformation de Lorentz devient

$$\left\{\begin{array}{l} ct' = ct\cosh\theta - x\sinh\theta \\ x' = x\cosh\theta - ct\sinh\theta \\ y' = y \\ z' = z \end{array}\right. \Longrightarrow \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\theta & -\sinh\theta & 0 & 0 \\ -\sinh\theta & \cosh\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \tag{1.29}$$

Les transformations de Lorentz forment un groupe de Lie de transformations continues dont la transformation infinitésimale correspond au cas où le paramètre du groupe prend la valeur infinitésimale $\delta\theta$. Elle s'obtient en utilisant le fait que $\cosh\delta\theta \approx 1$ et $\sinh\delta\theta \approx \delta\theta$ et le résultat sera la transformation

$$\left\{\begin{array}{l} x' = x - c\,t\delta\theta \\ c\,t' = c\,t - x\delta\theta \\ y' = y \quad z' = z \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \delta x = -c\,t\delta\theta \\ \delta c\,t = -x\delta\theta \\ \delta y = 0 \quad \delta z = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \delta x = -\delta\theta\, ct\, \frac{\partial}{\partial x}x \\ \delta c\,t = -\delta\theta\, x\, \frac{\partial}{\partial ct}ct \\ \delta y = 0 \quad \delta z = 0 \end{array}\right. . \tag{1.30}$$

L'opérateur infinitésimal de notre groupe est $X_\theta = -c\,t\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial ct}$ obtenu directement à partir de la transformation infinitésimale précédente.

Maintenant, soit une particule en mouvement par rapport au repère (R) avec une vitesse $\vec{v} = (v_x = \frac{dx}{dt}, v_y = \frac{dy}{dt}, v_z = \frac{dz}{dt})$ qui sera vue dans le repère (R') avec une vitesse

$\vec{v'} = (v'_x = \frac{dx'}{dt'}, v'_y = \frac{dy'}{dt'}, v'_z = \frac{dz'}{dt'})$. A partir de la transformation de Lorentz (1.27), on peut tirer les relations suivantes :

$$\begin{cases} dx' = \gamma(dx - v_e dt) \\ dt' = \gamma(dt - \frac{v_e}{c^2} dx) \\ dy' = dy \quad dz' = dz \end{cases} \tag{1.31}$$

d'où la loi de composition des vitesses relativiste bien connue

$$\begin{cases} \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma(dx - v_e dt)}{\gamma(dt - \frac{v_e}{c^2} dx)} \\ \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{\gamma(dt - \frac{v_e}{c^2} dx)} \\ \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{\gamma(dt - \frac{v_e}{c^2} dx)} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \frac{dx'}{dt'} = \frac{\frac{dx}{dt} - v_e}{1 - \frac{v_e}{c^2}\frac{dx}{dt}} \\ \frac{dy'}{dt'} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\gamma(1 - \frac{v_e}{c^2}\frac{dx}{dt})} \\ \frac{dz'}{dt'} = \frac{\frac{dz}{dt}}{\gamma(1 - \frac{v_e}{c^2}\frac{dx}{dt})} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} v'_x = \frac{v_x - v_e}{1 - \frac{v_e}{c^2} v_x} \\ v'_y = \frac{v_y}{\gamma(1 - \frac{v_e}{c^2} v_x)} \\ v'_z = \frac{v_z}{\gamma(1 - \frac{v_e}{c^2} v_x)} \end{cases} . \tag{1.32}$$

Il est clair que quand $c \longrightarrow \infty$, on retrouve la loi classique de composition des vitesses. Maintenant, si on considère un photon de lumière qui se déplace selon l'axe (OX) par rapport au repère (R) avec la vitesse $(v_x, v_y, v_z) = (c, 0, 0)$, il est clair qu'il aura la vitesse $(v'_x, v'_y, v'_z) = (c, 0, 0)$ par rapport au repère(R') [2], ainsi le principe de l'invariance de la vitesse de la lumière c est respecté.

Avant de passer au paragraphe suivant, il est très utile de remarquer l'invariance sous la transformation de Lorentz de la quantité ds définie par

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \tag{1.33}$$

En effet, d'après les relations (1.31)

$$ds'^2 = c^2 dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 = \gamma^2[(c^2 - v_e^2)dt^2 - (1 - \frac{v_e^2}{c^2})dx^2] - dy^2 - dz^2 = ds^2.$$

Ce résultat est dû au fait que $\gamma^2 = (1 - \frac{v_e^2}{c^2})^{-1}$. A présent, si on suppose que $\vec{dr} = (dx, dy, dz)$ est le déplacement infinitésimal d'une particule pendant la durée dt par rapport à (R), on peut définir le temps propre $d\tau$ mesuré dans son référentiel propre par

$$d\tau = \frac{ds}{c} = \sqrt{dt^2 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right)}\, dt = \sqrt{1 - \frac{\vec{v}^{\,2}}{c^2}}\, dt. \tag{1.34}$$

Puisque ds est invariant, il est de même pour $d\tau$, ce qui veut dire que

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{\vec{v}^{\,2}}{c^2}}\, dt = \sqrt{1 - \frac{\vec{v'}^{\,2}}{c^2}}\, dt'. \tag{1.35}$$

Cette propriété joue un rôle crucial dans la dynamique relativiste. Un calcul analogue montre que s défini par $s^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ est aussi un invariant de Lorentz.

2. : En réalité, dans une transformation de Lorentz, c'est le module de la vitesse de la lumière qui est invariant, pas ses composantes selon les trois axes.

1.2.1-b. Relation de dispersion énergie-impulsion et dynamique relativiste

Soit une particule de masse au repos m_o se déplaçant avec une vitesse $\vec{v} = (\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt})$ par rapport au repère (R) et vue avec la vitesse $\vec{v'} = (\frac{dx'}{dt'}, \frac{dy'}{dt'}, \frac{dz'}{dt'})$ dans le repère (R') en translation uniforme par rapport à (R) avec la vitesse v_e selon l'axe (OX). D'après la relation (1.35), $\gamma_{\vec{v}}\frac{1}{dt} = \gamma_{\vec{v'}}\frac{1}{dt'}$ où $\gamma_{\vec{v}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\vec{v}^{\,2}}{c^2}}}$ et $\gamma_{\vec{v'}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\vec{v'}^{\,2}}{c^2}}}$. Multiplions maintenant les membres de gauche des équations (1.31) par $m_o\gamma_{\vec{v'}}\frac{1}{dt'}$, et les membres de droite par $m_o\gamma_{\vec{v}}\frac{1}{dt}$ pour aboutir aux relations suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l} m_o\gamma_{\vec{v'}} = \gamma(m_o\gamma_{\vec{v}} - \frac{v_e}{c^2}\, m_o\gamma_{\vec{v}}\,\frac{dx}{dt}) \\ m_o\gamma_{\vec{v'}}\,\frac{dx'}{dt'} = \gamma(m_o\gamma_{\vec{v}}\,\frac{dx}{dt} - v_e m_o\gamma_{\vec{v}}) \\ m_o\gamma_{\vec{v'}}\,\frac{dy'}{dt'} = m_o\gamma_{\vec{v}}\,\frac{dy}{dt} \\ m_o\gamma_{\vec{v'}}\,\frac{dz'}{dt} = m_o\gamma_{\vec{v}}\,\frac{dz}{dt} \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} E' = \gamma(E - v_e p_x) \\ p'_x = \gamma(p_x - \frac{v_e}{c^2}E) \\ p'_y = p_y \\ p'_z = p_z \end{array}\right. \tag{1.36}$$

où les grandeurs $\vec{p} = (p_x, p_y, p_z)$ et E sont données par

$$\vec{p} = \frac{m_o\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{\vec{v}^{\,2}}{c^2}}} = \gamma_{\vec{v}}\, m_o\vec{v} \qquad\qquad E = \frac{m_o c^2}{\sqrt{1-\frac{\vec{v}^{\,2}}{c^2}}} = \gamma_{\vec{v}}\, m_o c^2. \tag{1.37}$$

En realité, on vient de donner les expressions de l'impulsion $\vec{p}$ et de l'énergie E d'une particule relativiste de masse au repos m_o se déplaçant avec une vitesse $\vec{v}$ par rapport à un repère (R). Dans le cas où $|\vec{v}| \ll c$, ce qui veut dire que $\frac{\vec{v}^2}{c^2} \ll 1$, le développement à l'ordre un nous donne les expressions de la mécanique classique

$$E = m_o c^2(1 - \frac{\vec{v}^{\,2}}{c^2})^{-\frac{1}{2}} \approx m_o c^2(1 + \frac{1}{2}\frac{\vec{v}^{\,2}}{c^2}) = m_o c^2 + \frac{1}{2}m_o\vec{v}^{\,2} \qquad\qquad \lim_{c\longrightarrow\infty}\vec{p} = m_o\vec{v}$$

où $m_o c^2$ est l'énergie au repos de notre particule, concept propre à la relativité restreinte.

A partir des relations (1.37), on obtient la relation de dispersion énergie-impulsion

$$E^2 - \vec{p}^{\,2}c^2 = m_o^2 c^4$$

d'où

$$E = \sqrt{\vec{p}^{\,2}c^2 + m_o^2 c^4} \tag{1.38}$$

Le choix de la racine positive vient du fait que d'après les relations (1.37), l'énergie $E \geq 0$. On en déduit aussi, que dans le cas d'une particule sans masse (le photon par exemple), la relation de dispersion se simplifie sous la forme $E = |\vec{p}|\, c$. D'après les équations (1.37) et (1.38), on tire deux définitions différentes du vecteur vitesse

$$\vec{v} = \frac{c^2\,\vec{p}}{E} \qquad\qquad \vec{v} = \frac{\partial E}{\partial \vec{p}} = \frac{c^2\,\vec{p}}{\sqrt{\vec{p}^{\,2}c^2 + m_o^2 c^4}} \tag{1.39}$$

où l'opérateur $\frac{\partial}{\partial\vec{p}} = (\frac{\partial}{\partial p_x}, \frac{\partial}{\partial p_y}, \frac{\partial}{\partial p_z})$ est le gradient par rapport aux impulsions p_x, p_y et p_z.

En présence d'un champ de force $\vec{F}(\vec{x},\vec{v},t)$, le principe fondamental de la dynamique relativiste s'énonce comme suit :

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=\vec{F}(\vec{x},\vec{v},t) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}}\vec{v}\right)=\vec{F}(\vec{x},\vec{v},t). \tag{1.40}$$

Premièrement, pour les petites vitesses ($\gamma_{\vec{v}} \cong 1$) on retrouve le principe de Newton et deuxièmement, si la force est nulle, on obtient la loi de conservation de l'impulsion. A cela s'ajoute la relation $\frac{dE}{dt}=\frac{c^2}{E}\vec{F}.\vec{p}=\vec{F}.\vec{v}$ qui traduit la variation de l'énergie totale (1.37).

1.2.2 Espace de Minkowski et formulation covariante

1.2.2-a. Espace de Minkowski et quadrivecteurs

Vers l'année 1909, le mathématicien russe Hermann Minkowski a imaginé un espace quadridimensionel, appelé l'espace-temps, afin de reformuler la relativité restreinte d'une manière élégante et covariante. Dans cet espace, on définit d'abord le quadrivecteur position

$$(ct,x,y,z)^t=(x^0,x^1,x^2,x^3)^t. \tag{1.41}$$

Dans ce mémoire, l'indice zéro (0) va désigner la composante temporelle et les indices $\{1,2,3\}$ désigneront les composantes spatiales des différentes entités de l' espace-temps. En plus, les lettres grecques $\{\mu,\nu,\rho,\gamma,...\}$ en indice courent sur les quatre valeurs $0,1,2,3$, alors que les indices latins $\{i,j,k,l,..\}$ prennent seulement les valeurs $1,2,3$.

Dans l'espace-temps, nous appelons une entité $\mathcal{A}=(A^0,A^1,A^2,A^3)$ un quadrivecteur, si ses composantes se transforment par une transformation de Lorentz comme suit :

$$\begin{cases} A'^1=\gamma(A^1-\beta A^0) \\ A'^0=\gamma(A^0-\beta A^1) \\ A'^2=A^2 \\ A'^3=A^3 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} A'^0 \\ A'^1 \\ A'^2 \\ A'^3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^0 \\ A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{pmatrix}. \tag{1.42}$$

Soient maintenant deux quadri-vecteurs $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$. Leur produit scalaire dans l'espace de Minkowski sera défini par l'expression

$$\mathcal{A}\,\mathcal{B}=A^0\,B^0-A^1\,B^1-A^2\,B^2-A^3\,B^3=A^0\,B^0-\vec{A}.\vec{B}. \tag{1.43}$$

Le produit scalaire de deux quadrivecteurs est un invariant de Lorentz pour la même raison que celle de la démonstration de l'invariance de ds défini par l'équation (1.33). Donc, la métrique $\eta_{\mu\nu}$ de l'espace de Minkowski s'écrit sous la forme matricielle

$$\eta=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}=\eta^{-1}. \tag{1.44}$$

Cette métrique est symétrique ($\eta_{\mu\nu} = \eta_{\nu\mu}$) et les éléments de la matrice η^{-1} notés $\eta^{\mu\nu}$, vérifient l'équation

$$\eta\eta^{-1} = \eta^{-1}\eta = I_{4\times4} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum_{\nu=0}^{3} \eta_{\mu\nu}\,\eta^{\nu\rho} = \delta^{\rho}_{\mu} \qquad \sum_{\nu=0}^{3} \eta^{\mu\nu}\,\eta_{\nu\rho} = \delta^{\mu}_{\rho}. \tag{1.45}$$

Mais puisque $\eta^{-1} = \eta$, il s'en suit que $\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}$. Ainsi, le produit scalaire aura l'expression[3]

$$\mathcal{A}\,\mathcal{B} = \sum_{\mu=0}^{3}\sum_{\nu=0}^{3} \eta_{\mu\nu} A^{\mu}\,B^{\nu} = \eta_{\mu\nu} A^{\mu}\,B^{\nu}. \tag{1.46}$$

Les A^{μ} sont les composantes contravariantes du quadrivecteur $\mathcal{A}$, et on peut définir ses composantes covariantes à l'aide de la formule :

$$A_{\mu} = \eta_{\mu\nu}A^{\nu} \qquad \Longleftrightarrow \qquad A^{\mu} = \eta^{\mu\nu}A_{\nu} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} A_0 = A^0 \\ A_i = -A^i \end{cases}. \tag{1.47}$$

On en déduit que les composantes covariantes du quadrivecteur position sont données par

$$x_{\mu} = \eta_{\mu\nu}x^{\nu} \qquad \Longleftrightarrow \qquad (x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct, -x, -y, -z) \tag{1.48}$$

Le produit scalaire $\mathcal{A}\,\mathcal{B}$ peut maintenant être réécrit sous la forme

$$\mathcal{A}\,\mathcal{B} = \eta_{\mu\nu}A^{\mu}\,B^{\nu} = A_{\nu}B^{\nu} = \eta^{\mu\nu}A_{\nu}B_{\mu} = A^{\mu}B_{\mu}. \tag{1.49}$$

Le tableau ci-dessous contient les principaux quadrivecteurs de l'espace-temps.

Quadrivecteur	Définition	Expression	Carré
Position	x^{μ}	$(ct, x, y, z) = (ct, \vec{r})$	$x_{\mu}\,x^{\mu} = c^2t^2 - \vec{r}^2 = s^2$
Déplacement infinitésimal	dx^{μ}	$(dx^0, dx, dy, dz) = (c\,dt, d\vec{r})$	$dx_{\mu}\,dx^{\mu} = c^2dt^2 - d\vec{r}^2$ $= ds^2 = c^2d\tau^2$
Vitesse d'une particule	$u^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{d\tau}$	$\gamma_{\vec{v}}(c, v_x, v_y, v_z) = \gamma_{\vec{v}}(c, \vec{v})$	$\frac{dx^{\mu}}{d\tau}\frac{dx_{\mu}}{d\tau} = c^2$
Énergie-impulsion d'une particule	$p^{\mu} = m_o u^{\mu}$	$(\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z) = \gamma_{\vec{v}}\,m_o(c, \vec{v})$	$p_{\mu}p^{\mu} = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = m_o^2c^2$
Nabla	$\partial_{\mu} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}$	$(\frac{\partial}{\partial ct}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}) = (c^{-1}\partial_t, \vec{\nabla})$	$\partial_{\mu}\partial^{\mu} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta = -\Box$

où $d\tau$ est le temps propre, m_o est la masse au repos d'une particule, $\vec{v}$ sa vitesse, et $\gamma_{\vec{v}} = (1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2})^{-\frac{1}{2}}$ vérifiant la relation $\gamma_{\vec{v}}\,d\tau = dt$.

1.2.2-b. Lagrangien et hamiltonien covariants libres

Soit une particule libre de masse au repos m_o se déplaçant avec une vitesse $\vec{v}$, ce qui lui communique une énergie E et une impulsion $\vec{p}$; autrement dit, elle possède le quadrivecteur énergie-impulsion $(p^{\mu}) = (\frac{E}{c}, \vec{p}) = \gamma_{\vec{v}}\,m_o(c, \vec{v})$. L'équation covariante

$$\frac{d}{d\tau}(m_o\frac{dx^{\nu}}{d\tau}) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{dp^{\mu}}{d\tau} = 0 \qquad\qquad \mu \in \{0, 1, 2, 3\} \tag{1.50}$$

3. Nous avons utilisé la convention d'Einstein qui consiste à sommer sur chaque indice figurant deux fois dans le même mônome tel que l'un soit situé en exposant et l'autre en indice.

contient le principe fondamental de la dynamique relativiste $\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(\gamma_{\vec{v}}\, m_o \vec{v}) = \vec{0}$ et loi de conservation de l'énergie totale $\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}(\gamma_{\vec{v}}\, m_o c^2) = 0$ d'une particule libre car $\gamma_{\vec{v}}\, d\tau = dt$.

L'ensemble des points occupés par notre particule dans l'espace de Minkowski constitue sa ligne d'univers qui est une courbe quadridimensionnelle. Choisissons une paramétrisation de cette courbe de $(x^\mu(\omega)) = (ct(\omega), x(\omega), y(\omega), z(\omega))$ où ω est un paramètre quelconque. Si on prend une action de notre particule de la forme

$$\mathcal{S} = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \mathcal{L}\, d\omega = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{1}{2} m_o \frac{dx^\mu}{d\omega}\frac{dx_\mu}{d\omega}\, d\omega \qquad \Longrightarrow \qquad \mathcal{L} = \frac{1}{2} m_o \frac{dx^\mu}{d\omega}\frac{dx_\mu}{d\omega}, \tag{1.51}$$

l'application du principe de moindre action conduit aux équations d'Euler-Lagrange

$$\frac{d}{d\omega}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\frac{dx_\nu}{d\omega})} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\nu} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{d}{d\omega}(m_o \frac{dx^\nu}{d\omega}) = 0. \tag{1.52}$$

La comparaison de ce résultat avec l'équation (1.50) nous montre que si on souhaite que le mouvement de notre particule soit régi par la loi de la dynamique relativiste, il faut identifier le paramètre ω au temps propre τ ($d\omega = d\tau$). La raison pour laquelle on n'a pas choisi directement τ comme paramètre réside dans le fait qu'on a la contrainte $\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx_\mu}{d\tau} = c^2$. C'est pour ça qu'on a préféré travailler avec un paramètre quelconque ω ensuite l'identifier au temps propre τ une fois que les équations du mouvement sont obtenues à partir du lagrangien $\mathcal{L}$. Cela revient à travailler directement avec le lagrangien invariant

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m_o \frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx_\mu}{d\tau} \tag{1.53}$$

en considérant les composantes $\frac{dx^\mu}{d\tau}$, $\mu = 0, 1, 2, 3$ comme étant indépendantes, ensuite imposer la condition $\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx_\mu}{d\tau} = c^2$ une fois qu'on a dérivé les équations d'Euler-Lagrange.

A ce stade, il est temps de songer à un hamiltonien covariant $\mathcal{H}$ pour notre lagrangien. Commençons par définir les moments conjugués

$$p^{\,\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\frac{dx_\nu}{d\tau})} \quad \Longrightarrow \quad p^{\,\nu} = m_o \frac{dx_\mu}{d\tau} \quad \Longrightarrow \quad \frac{dx_\mu}{d\tau} = \frac{p^{\,\nu}}{m_o} \tag{1.54}$$

où on retrouve bien l'expression du quadrivecteur énergie-impulsion. En utilisant les dernières relations, le hamiltonien $\mathcal{H}$ peut être calculer comme suit :

$$\mathcal{H} = p^{\,\mu}\, \frac{dx_\mu}{d\tau} - \mathcal{L} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathcal{H} = \frac{p_\mu p^\mu}{2m_o}. \tag{1.55}$$

L'application des équations de Hamilton nous donne les équations

$$\begin{cases} \frac{dx_\nu}{d\tau} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p^\nu} & \Longrightarrow \quad \frac{dx_\nu}{d\tau} = \frac{p_\nu}{m_o} \\ \frac{dp^\nu}{d\tau} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_\nu} & \Longrightarrow \quad \frac{dp^{\,\nu}}{d\tau} = 0 \end{cases}. \tag{1.56}$$

Ces deux équations expriment la relation entre le quadrivecteur vitesse et le quadrivecteur énergie-impulsion, ainsi que la conservation de ce dernier dans le cas d'une particule libre.

A l'aide des équations de Hamilton (1.56), l'évolution de la fonction $g(x_\mu(\tau), p^\mu(\tau))$ au cours de la variation de τ est donnée par

$$\frac{dg}{d\tau} = \frac{\partial g}{\partial x_\nu}\frac{dx_\nu}{d\tau} + \frac{\partial g}{\partial p^\nu}\frac{dp^\nu}{d\tau} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{dg}{d\tau} = \frac{\partial g}{\partial x_\nu}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p^\nu} - \frac{\partial g}{\partial p^\nu}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_\nu}. \tag{1.57}$$

Nous venons ainsi de définir le crochet de Poison $\{\mathcal{H}, g\}$ et d'une manière générale, le crochet de Poisson de deux fonctions f et g de l'espace des phases est défini par la relation

$$\{f, g\} = -\frac{\partial f}{\partial x_\nu}\frac{\partial g}{\partial p^\nu} + \frac{\partial f}{\partial p^\nu}\frac{\partial g}{\partial x_\nu}. \tag{1.58}$$

Avec cette définition, le crochet de Poisson vérifie les relations suivantes :

$$\begin{cases} \{f, g\} = -\{g, f\} \implies \{f, f\} = 0 & (L'antisymétrie) \\ \{f, g\,h\} = \{f, g\}h + g\{f, h\} & (La\ règle\ de\ Leibniz) \\ \{f, \{g, h\}\} + \{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\} = 0 & (L'identité\ de\ Jacobi) \\ \{f, g + h\} = \{f, g\} + \{f, h\} & (La\ linéarité). \end{cases} \tag{1.59}$$

En particulier, les relations de commutation relatives aux variables fondamentales x^μ et p^μ de l'espace des phases de Minkowski forment en terme des crochets de Poisson l'algèbre de Heisenberg

$$\{x^\mu, x^\nu\} = 0 \qquad \{x^\mu, p^\nu\} = -\eta^{\mu\nu} \qquad \{p^\mu, p^\nu\} = 0. \tag{1.60}$$

A cela s'ajoutent les relations ci-dessous qui nous seront très utiles par la suite

$$\frac{\partial f}{\partial x_\mu} = -\{f, p^\mu\} \qquad \frac{\partial f}{\partial p^\mu} = \{f, x_\mu\}. \tag{1.61}$$

A l'aide de (1.60), le crochet de Poisson prend la forme plus générale

$$\{f, g\} = \{x_\mu, x_\nu\}\frac{\partial f}{\partial x_\mu}\frac{\partial g}{\partial x_\nu} + \{x_\mu, p_\nu\}\left(\frac{\partial f}{\partial x_\mu}\frac{\partial g}{\partial p_\nu} - \frac{\partial f}{\partial p_\nu}\frac{\partial g}{\partial x_\mu}\right) + \{p_\mu, p_\nu\}\frac{\partial f}{\partial p_\mu}\frac{\partial g}{\partial p_\nu}. \tag{1.62}$$

1.2.3 Groupe des transformations de Lorentz générale

1.2.3-a. Groupe de Lorentz des transformations finies et sa transformation infinitésimale

La transformation de Lorentz (1.29) réécrite ci-dessous laisse invariant la quantité $ds = \sqrt{dx^\mu dx_\mu} = \sqrt{c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}$ ainsi que $s = \sqrt{x^\mu x_\mu} = \sqrt{c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2}$.

$$\begin{cases} ct' = ct\,\cosh\theta - x\,\sinh\theta \\ x' = -ct\,\sinh\theta + x\,\cosh\theta \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \Longrightarrow \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\theta & -\sinh\theta & 0 & 0 \\ -\sinh\theta & \cosh\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{1.63}$$

où θ est un paramètre réel. Mais cette transformation n'est qu'un cas particulier, elle correspond à la translation uniforme selon l'axe (OX), alors qu'on peut imaginer des mouvements relatifs selon les autres axes. Donc il s'agit d'une transformation spéciale. En plus, il existe d'autres transformations de l'espace-temps de Minkowski qui laissent aussi l'élément ds invariant. Un bon exemple serait la rotation autour de l'axe (OZ) dont les équations sont

$$\begin{cases} ct' = ct \\ x' = \ \ x\,\cos\vartheta + y\,\sin\vartheta \\ y' = -x\,\sin\vartheta + y\,\cos\vartheta \\ z' = z \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & \sin\vartheta & 0 \\ 0 & -\sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{1.64}$$

où ϑ est un paramètre réel. Toutes ces transformations linéaires laissent invariant l'élément ds ainsi que $s = \sqrt{x^\mu x_\mu}$.

Les transformations (1.63) et (1.64) sont des cas particuliers de la forme générale de la transformation de Lorentz qui est

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda^0{}_0 & \Lambda^0{}_1 & \Lambda^0{}_2 & \Lambda^0{}_3 \\ \Lambda^1{}_0 & \Lambda^1{}_1 & \Lambda^1{}_2 & \Lambda^1{}_3 \\ \Lambda^2{}_0 & \Lambda^2{}_1 & \Lambda^2{}_2 & \Lambda^2{}_3 \\ \Lambda^3{}_0 & \Lambda^3{}_1 & \Lambda^3{}_2 & \Lambda^3{}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad x' = \Lambda\, x \tag{1.65}$$

où les $\Lambda^\mu{}_\nu$ sont des constantes réelles indépendantes des coordonnées x^μ. En terme d'indices, cette transformation va prendre la forme

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu\, x^\nu \tag{1.66}$$

et sa différentielle la forme

$$dx'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu\, dx^\nu. \tag{1.67}$$

L'invariance de l'élément $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\mu$ impose certaines restrictions sur les éléments de la matrice Λ. En effet,

$$ds^2 = ds'^2 \implies \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\mu = \eta_{\gamma\rho} dx'^\gamma dx'^\rho \implies \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\mu = \eta_{\gamma\rho} \Lambda^\gamma{}_\mu\, dx^\mu \Lambda^\rho{}_\nu\, dx^\nu.$$

Puisque les dx^μ sont indépendants, on obtient par identification la relation

$$\eta_{\mu\nu} = \Lambda^\gamma{}_\mu\, \eta_{\gamma\rho} \Lambda^\rho{}_\nu \qquad \Longleftrightarrow \qquad \eta = \Lambda^t\, \eta\, \Lambda. \tag{1.68}$$

Pour résumer, une transformation de Lorentz est une transformation linéaire de $\mathbb{R}^4$ dont les équations sont

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu\, x^\nu \qquad avec \qquad \eta_{\mu\nu} = \Lambda^\gamma{}_\mu\, \eta_{\gamma\rho} \Lambda^\rho{}_\nu. \tag{1.69}$$

Imaginons maintenant une transformation de Lorentz très proche de la transformation identité. Autrement dit, une transformation de la forme

$$x' = (I_{4\times 4} + \omega)\, x \tag{1.70}$$

où les éléments de la matrice ω sont infinitésimaux (très proche de zéro (0)). Si on passe aux indices, on aura l'expression

$$x'^{\mu} = (\delta^{\mu}{}_{\nu} + \omega^{\mu}{}_{\nu})\, x^{\nu}. \tag{1.71}$$

Le fait que (1.71) soit une transformation de Lorentz implique que la matrice $(I_{4\times4} + \omega) \in O(1,3)$, ce qui veut dire que

$$(I_{4\times4} + \omega)^t\, \eta\, (I_{4\times4} + \omega) = \eta \qquad \Longrightarrow \qquad \eta + \omega^t\eta + \eta\omega = \eta. \tag{1.72}$$

Cette dernière égalité est obtenue en négligeant le terme $\omega^t\eta\omega$ car il s'agit d'une multiplication de deux matrices infinitésimales. Donc la condition sur la matrice ω est

$$\omega^t\eta = -\eta\,\omega \quad \Rightarrow \quad \omega^{\nu}{}_{\mu}\eta_{\nu\rho} = -\eta_{\mu\nu}\omega^{\nu}{}_{\rho} \quad \Rightarrow \quad \eta^{\mu\gamma}\eta^{\rho\sigma}\omega^{\nu}{}_{\mu}\eta_{\nu\rho} = -\eta^{\mu\gamma}\eta^{\rho\sigma}\eta_{\mu\nu}\omega^{\nu}{}_{\rho}. \tag{1.73}$$

Si on pose

$$\omega^{\nu}{}_{\mu}\eta^{\mu\gamma} = \omega^{\nu\gamma} \tag{1.74}$$

la relation (1.73) nous conduit à ce résultat

$$\omega^{\sigma\gamma} = -\omega^{\gamma\sigma} \qquad \Longrightarrow \qquad \omega^{\sigma\gamma} = 0 \quad si\ \gamma = \sigma. \tag{1.75}$$

Ainsi la transformation infinitésimale (1.71) va prendre la forme

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \omega^{\mu\rho}\, x_{\rho} \qquad avec \qquad \omega^{\mu\rho} = -\omega^{\rho\mu}. \tag{1.76}$$

Cette transformation dépend des paramètres $\omega^{\mu\rho}$ vu l'antisymétrie des $\omega^{\mu\nu}$ ($\omega^{\mu\nu} = -\omega^{\nu\mu}$), ce qui fait du groupe de transformations de Lorentz un groupe de Lie de transformations à six paramètres réels.

Avant de terminer cette sous-section, il est très utile d'expliciter cette transformation dans les deux cas suivants :

1. Quand seulement $\omega^{01} = -\omega^{10} = \delta\theta$ sont différents de zéro, on aura la transformation

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \omega^{\mu 0}\, x_0 + \omega^{\mu 1}\, x_1 \quad \Longrightarrow \quad x'^{\mu} = x^{\mu} + \omega^{\mu 0}\, x^0 - \omega^{\mu 1}\, x^1$$

   qui est rien d'autre que la transformation infinitésimale spéciale donnée par (1.30).

2. Maintenant, si $\omega^{12} = -\omega^{21} = -\delta\vartheta$ est le seul paramètre non nul, on aura

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \omega^{\mu 1}\, x_1 + \omega^{\mu 2}\, x_2 \quad \Longrightarrow \quad x'^{\mu} = x^{\mu} - \omega^{\mu 1}\, x^1 - \omega^{\mu 2}\, x^2$$

   Explicitement, il s'agit de la rotation infinitésimale relative à la rotation finie (1.64).

$$\begin{cases} x'^1 = x^1 + x^2\delta\vartheta \\ x'^2 = x^2 - x^1\delta\vartheta \\ x'^0 = x^0\ ;\ x'^3 = x^3 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} x' = x + y\delta\vartheta \\ y' = y - x\delta\vartheta \\ ct' = ct\ \ ;\ \ z' = z \end{cases} \tag{1.77}$$

1.2.3-b Opérateurs infinitésimaux et algèbre de Lorentz

Après avoir écrit la transformation infinitésimale de Lorentz (1.76), examinons ses conséquences sur la variation infinitésimale δF d'une fonction differentiable des coordonnées $F(x) = F(x^\mu) = F(x^0, x^1, x^2, x^3)$.

$$\delta F = F(x') - F(x) = F(x^\mu + \omega^{\mu\nu} x_\nu) - F(x) = F(x) + (\omega^{\mu\nu} x_\nu)\frac{\partial F(x)}{\partial x^\mu} - F(x)$$

car les quantités $(\omega^{\mu\rho} x_\rho)$ sont infinitésimales. Donc

$$\delta F = \omega^{\mu\nu} x_\nu \partial_\mu F(x). \tag{1.78}$$

En utilisant l'antisymétrie des paramètres $\omega^{\mu\nu}$ on aura

$$\omega^{\mu\nu} x_\nu \partial_\mu = \frac{1}{2}(\omega^{\mu\nu} + \omega^{\mu\nu}) x_\nu \partial_\mu = \frac{1}{2}(\omega^{\mu\nu} - \omega^{\nu\mu}) x_\nu \partial_\mu = \frac{1}{2}(\omega^{\mu\nu} x_\nu \partial_\mu - \omega^{\mu\nu} x_\mu \partial_\nu)$$

$$\omega^{\mu\nu} x_\nu \partial_\mu = \frac{1}{2}\,\omega^{\mu\nu}(x_\nu \partial_\mu - x_\mu \partial_\nu). \tag{1.79}$$

La variation infinitésimale δF devient alors

$$\delta F = \frac{1}{2}\,\omega^{\mu\nu}(x_\nu \partial_\mu - x_\mu \partial_\nu) F(x) = -\frac{1}{2}\omega^{\mu\nu} L_{\mu\nu} F(x) \tag{1.80}$$

où les opérateurs différentiels $L_{\mu\nu}$ sont donnés par

$$L_{\mu\nu} = x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu. \tag{1.81}$$

Il s'agit des opérateurs infinitésimaux (générateurs) du groupe des transformations de Lorentz. En particulier, si prend $F(x) = x^\mu$, on pourra écrire la transformation infinitésimale de Lorentz (1.76) sous la forme

$$\delta x^\mu = x'^\mu - x^\mu = -\frac{1}{2}\,\omega^{\nu\rho} L_{\nu\rho} x^\mu \quad \Longrightarrow \quad x'^\mu = \left(1 - \frac{1}{2}\,\omega^{\nu\rho} L_{\nu\rho}\right) x^\mu. \tag{1.82}$$

Afin de calculer les différents commutateurs relatifs aux générateurs $L_{\mu\nu}$, nous allons utiliser le fait que si A, B et C sont trois opérateurs, les propriétés suivantes sont satisfaites.

$$[A, B + C] = [A, B] + [A, C] \qquad ; \qquad [A, BC] = B[A, C] + [A, B]C. \tag{1.83}$$

En effet, procédons par étapes :

1. $[x_\mu, x_\nu] = 0 \qquad [\partial_\mu, \partial_\nu] = 0$;
2. $[x_\mu, \partial_\nu] = x_\mu \partial_\rho - x_\mu \partial_\rho - (\partial_\rho x_\mu) = -\eta_{\rho\mu}$;
3. $[L_{\mu\nu}, \partial_\rho] = [x_\mu, \partial_\rho]\partial_\nu - [x_\nu, \partial_\rho]\partial_\mu = -\eta_{\mu\rho}\partial_\nu + \eta_{\nu\rho}\partial_\mu$
4. $[L_{\mu\nu}, x_\gamma] = x_\mu[\partial_\nu, x_\gamma] - x_\nu[\partial_\mu, x_\gamma] = x_\mu \eta_{\nu\gamma} - x_\nu \eta_{\mu\gamma}$;

5. $[L_{\mu\nu}, x_\gamma\partial_\rho] = x_\gamma(-\eta_{\mu\rho}\partial_\nu + \eta_{\nu\rho}\partial_\mu) + (x_\mu\eta_{\nu\gamma} - x_\nu\eta_{\mu\gamma})\partial_\rho$
   $= -\eta_{\mu\rho}x_\gamma\partial_\nu + \eta_{\nu\rho}x_\gamma\partial_\mu + \eta_{\nu\gamma}x_\mu\partial_\rho - \eta_{\mu\gamma}x_\nu\partial_\rho$;
6. $[L_{\mu\nu}, L_{\gamma\rho}] = [L_{\mu\nu}, x_\gamma\partial_\rho] - [L_{\mu\nu}, x_\rho\partial_\gamma] = -\eta_{\mu\rho}L_{\gamma\nu} + \eta_{\nu\rho}L_{\gamma\mu} + \eta_{\nu\gamma}L_{\mu\rho} - \eta_{\mu\gamma}L_{\nu\rho}$

Donc l'algèbre de Lorentz est donnée par l'ensemble des relations de commutations

$$\left\{ \; [L_{\mu\nu}, L_{\gamma\rho}] = -\eta_{\mu\rho}L_{\gamma\nu} + \eta_{\nu\rho}L_{\gamma\mu} + \eta_{\nu\gamma}L_{\mu\rho} - \eta_{\mu\gamma}L_{\nu\rho}. \right. \tag{1.84}$$

A présent, on peut démontrer que la variation infinitésimale δF d'une fonction des coordonnées $F(x)$ sous la transformation infinitésimale de Lorentz (1.76) peut être calculée à l'aide de la formule

$$\delta F = F(x') - F(x) = [-\frac{1}{2}\,\omega^{\nu\rho}L_{\nu\rho}, F(x)]. \tag{1.85}$$

A l'aide des relations de commutation ci-dessus et du fait que les x_μ commutent avec $F(x)$, on aura

$$[-\frac{1}{2}\,\omega^{\nu\rho}L_{\nu\rho}, F(x)] = -\frac{1}{2}\,\omega^{\nu\rho}x_\nu[\partial_\rho, F(x)] + \frac{1}{2}\,\omega^{\nu\rho}x_\rho[\partial_\nu, F(x)].$$

Mais, comme

$$[\partial_\mu, F(x)] = \partial_\mu\,F(x) - F(x)\,\partial_\mu = (\partial_\mu F(x)) + F(x)\,\partial_\mu - F(x)\,\partial_\mu = \frac{\partial F(x)}{\partial x^\mu}$$

on en déduit que

$$[-\frac{1}{2}\,\omega^{\nu\rho}L_{\nu\rho}, F(x)] = -\frac{1}{2}\,\omega^{\nu\rho}x_\nu\frac{\partial F(x)}{\partial x^\rho} + \frac{1}{2}\,\omega^{\nu\rho}x_\rho\frac{\partial F(x)}{\partial x^\nu}.$$

Finalement, on obtient la relation

$$[-\frac{1}{2}\,\omega^{\nu\rho}L_{\nu\rho}, F(x)] = -\frac{1}{2}\,\omega^{\nu\rho}L_{\nu\rho}F(x). \tag{1.86}$$

La comparaison avec l'équation (1.80) nous donne la relation (1.85) qu'il fallait vérifier. Dans le cas où $F(x) = x^\mu$, on obtiendra la forme suivante de la transformation infinitésimale

$$\delta x^\mu = [-\frac{1}{2}\,\omega^{\nu\rho}L_{\nu\rho}, x^\mu]. \tag{1.87}$$

1.2.4 Lien entre les crochets de Poisson et le groupe de Lorentz

Dans ce qui suit, on envisage de montrer qu'on peut générer le groupe de Lorentz à l'aide du crochet de Poisson $\{\,,\,\}$ et des variables fondamentales x^μ et p^ν de l'espace des phases associé au mouvement d'une particule libre, et cela sans faire appel aux opérateurs infinitésimaux $L_{\mu\nu}$.

Commençons par le groupe de Lorentz. La transformation infinitésimale de Lorentz de quadrivecteur position peut s'écrire sous la forme

$$x'^\mu - x^\mu = \omega^{\mu\nu}x_\nu \qquad \Longleftrightarrow \qquad \delta x^\mu = \omega^{\mu\nu}x_\nu. \tag{1.88}$$

Puisque le quadrivecteur énergie-impulsion p^μ se transforme de la même manière que le quadrivecteur position, il en résulte que dans une transformation infinitésimale on aura

$$p'^\mu - p^\mu = \omega^{\mu\nu} p_\nu \qquad \Longleftrightarrow \qquad \delta p^\mu = \omega^{\mu\nu} p_\nu. \tag{1.89}$$

Essayons maintenant de retrouver ces transformation en utilisant le formalisme des crochets de Poisson. Pour cela, définissons le tenseur moment cinétique $J_{\mu\nu}$.

$$J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu \qquad \Longrightarrow \qquad J_{\mu\nu} = -J_{\nu\mu}. \tag{1.90}$$

En utilisant les relations (1.61), on vérifie que

$$\begin{cases} \{J_{\mu\nu}, x^\rho\} = \eta^{\rho\gamma}\{J_{\mu\nu}, x_\gamma\} = \eta^{\rho\gamma}\frac{\partial J_{\mu\nu}}{\partial p^\gamma} = \delta^\rho_\nu x_\mu - \delta^\rho_\mu x_\nu \\ \{J_{\mu\nu}, p^{\,\rho}\} = -\frac{\partial J_{\mu\nu}}{\partial x_\rho} = -\delta^\rho_\mu p_\nu + \delta^\rho_\nu p_\mu. \end{cases} \tag{1.91}$$

Revenons aux transformations infinitésimales (1.88) et (1.89). Vu l'antisymétrie des paramètres $\omega^{\mu\nu}$ ($\omega^{\mu\nu} = -\omega^{\nu\mu}$), ces dernières peuvent s'écrire

$$\begin{cases} \delta x^\mu = \frac{1}{2}(\omega^{\mu\nu} x_\nu - \omega^{\nu\mu} x_\nu) = \frac{1}{2}\omega^{\rho\nu}(\delta^\mu_\rho x_\nu - \delta^\mu_\nu x_\rho) \\ \delta p^\mu = \frac{1}{2}(\omega^{\mu\nu} p_\nu - \omega^{\nu\mu} p_\nu) = \frac{1}{2}\omega^{\rho\nu}(\delta^\mu_\rho p_\nu - \delta^\mu_\nu p_\rho) \end{cases} \tag{1.92}$$

et la comparaison avec les relations (1.91) nous permet d'écrire que

$$\delta x^\mu = -\frac{1}{2}\omega^{\rho\nu}\{J_{\rho\nu}, x^\mu\} \qquad\qquad \delta p^\mu = -\frac{1}{2}\omega^{\rho\nu}\{J_{\rho\nu}, p^\mu\}. \tag{1.93}$$

On vient de montrer qu'on peut vraiment générer la transformation infinitésimale de Lorentz à l'aide du crochet de Poisson et du tenseur moment cinétique $J_{\mu\nu}$. En général, Si $f(x,p)$ est une fonction de l'espace des phases, sa variation infinitésimale sous une transformation de Lorentz s'obtient à l'aide du crochet de Poisson comme suit :

$$f(x',p') - f(x,p) = -\frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}\{J_{\mu\nu}, f\} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \delta f = -\frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}\{J_{\mu\nu}, f\}. \tag{1.94}$$

Aux résultats précédents, s'ajoute cette remarque : les générateurs $J_{\mu\nu}$ laissent invariante l'algèbre de Lorentz (1.84) en terme des crochets de Poisson $\{\,,\,\}$, au lieu des commutateurs $[\,,\,]$ et des opérateurs infinitésimaux $L_{\mu\nu}$. En effet,

$$\begin{aligned} \{J_{\mu\nu}, J_{\gamma\rho}\} &= -\frac{\partial J_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda}\frac{\partial J_{\gamma\rho}}{\partial p^\lambda} + \frac{\partial J_{\mu\nu}}{\partial p^\lambda}\frac{\partial J_{\gamma\rho}}{\partial x_\lambda} \\ &= -(\delta^\lambda_\mu p_\nu - \delta^\lambda_\nu p_\mu)(\eta_{\rho\lambda} x_\gamma - \eta_{\gamma\lambda} x_\rho) + (\eta_{\nu\lambda} x_\mu - \eta_{\mu\lambda} x_\nu)(\delta^\lambda_\gamma p_\rho - \delta^\lambda_\rho p_\gamma) \\ &= \eta_{\mu\rho}(x_\nu p_\gamma - x_\gamma p_\nu) - \eta_{\gamma\mu}(x_\nu p_\rho - x_\rho p_\nu) + \eta_{\rho\nu}(x_\gamma p_\mu - x_\mu p_\gamma) - \eta_{\gamma\nu}(x_\rho p_\mu - x_\mu p_\rho) \\ \{J_{\mu\nu}, J_{\gamma\rho}\} &= \eta_{\mu\rho} J_{\nu\gamma} - \eta_{\gamma\mu} J_{\nu\rho} + \eta_{\rho\nu} J_{\gamma\mu} - \eta_{\gamma\nu} J_{\rho\mu} \end{aligned} \tag{1.95}$$

Il est facile et très utile de vérifier que la relation de dispersion $p_\rho p^\rho = m^2c^2$ est invariante sous une transformation de Lorentz car

$$\{J_{\mu\nu}, p_\rho p^\rho\} = -\frac{\partial J_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda}\frac{\partial (p_\rho p^\rho)}{\partial p^\lambda} = -(\delta^\lambda_\mu p_\nu - \delta^\lambda_\nu p_\mu)(2p_\lambda) = 0 \tag{1.96}$$

La conclusion qu'on peut tirer de ce qui est dit est que le groupe des transformations de Lorentz est étroitement lié aux crochets de Poisson covariants.

1.3 La relativité restreinte déformée

La théorie de la relativité doublement restreinte (appelée aussi la relativité restreinte déformée) qu'on désigne par DSR (de son appellation en anglais : *Doubly* ou *Deformed Special Relativity*) est une correction de la relativité restreinte dans le domaine des énergies très élevées et des petites distances ainsi que des temps très courts. En réalité, il existe deux théories principales de ce type : la DSR1 du physicien italien Giovanni Amelino-camelia [37, 38] et la DSR2 des physiciens Lee Smolin et João Magueijo [28, 29, 31]. Le résultat le plus remarquable de ces théories est la modification la relation de dispersion énergie-impulsion $E = mc^2$.

Dans ce qui suit, nous allons rappeler les grandes lignes de la relativité spéciale déformée dans le cadre de l'approche de Magueijo-Smolin vu sa simplicité et sa clarté [100].

1.3.1 Motivations

1.3.1-a Résultats théoriques de la théorie quantique de la gravité

L'échelle de Planck joue un rôle fondamental en théorie de gravitation quantique à boucles selon laquelle la courbure et l'espace-temps seront quantifiés. Le résultat le plus important de cette théorie est la quantification des surfaces et des volumes, ainsi que l'existence de quantités indivisibles et minimales de longueur et de durée qui jouent le rôle de quantum de l'espace-temps. Ces quantités sont la longueur de Planck $l_p = \sqrt{G\hbar/c^3} = 1,61624.10^{-35} mètres$ et le temps de Planck $t_p = \sqrt{G\hbar/c^5} = 5,39121.10^{-44} secondes$ auxquelles s'ajoute aussi l'énergie de Planck $E_p = c^2\sqrt{c\hbar/G} = 1,956.10^9 joules$, où c est la célérité de la lumière dans le vide, $\hbar$ est la constante de Planck réduite, et G la constante gravitationnelle. C'est seulement à cette échelle que l'image classique d'un espace-temps continu cesse d'être vraie, et la structure granulaire va prendre place.

Il est connu en relativité restreinte que les transformations de Lorentz conduisent au phénomènes de contraction des longueurs et de dilatation des durées, en plus d'une transformation bien déterminée de l'énergie. Cela apparemment peut poser un problème en ce qui concerne la manifestation de l'aspect granulaire de l'espace-temps pour les différents observateurs inertiels, car on peut toujours se demander pour quel observateur inertiel les quantités l_p, t_p et E_p seront elles déterminées ? Par exemple, si pour un observateur, un phénomène se déroule à une distance supérieure à la longueur de Planck l_p, il est possible qu'un autre observateur en mouvement le voit se produire à une distance bien inférieure à celle-ci, conséquence directe de la contraction des longueurs. Autrement dit, au moment où l'espace-temps est continu pour le premier, il est discontinu pour le deuxième. Des arguments similaires peuvent être avancés en ce qui concerne t_p et E_p. Cette situation va violer le principe fondamental de la relativité restreinte selon lequel tous les observateurs inertiels doivent utiliser les mêmes lois physiques pour décrire la nature, parce que chacun de nos observateurs peut se distinguer des autres selon qu'il observe l'aspect discontinu de l'espace-temps ou non.

Lee Smolin, Joao Magueijo, et Giovanni Amelino-Camelia ont vu la solution dans la modification des transformations et des lois la théorie de la relativité restreinte pour les petites distances et les courtes durées (notamment pour des énergies très élevées) sans toucher aux principe d'équivalence des référentiels inertiels. Pour ce faire, ils ont postulé un troisième principe en plus des deux postulats de la relativité restreinte selon lequel il existe une échelle de longueur l_p (ou d'énergie E_p) indépendante de tous les observateurs. Le résultat de cette reformulation est la théorie (ou les théories) de la relativité restreinte déformée (DSR) qui se veut une théorie qui apporte des modifications à la relativité restreinte à l'échelle de Planck en ajoutant un nouveau postulat aux postulats d'Einstein.

1.3.1-b Le paradoxe des rayons cosmiques d'énergie ultra-haute :

Le rayonnement cosmique découvert en 1912 par l'autrichien Viktor Hess, est le résultat de processus astrophysiques comme l'explosion des étoiles en supernovae, rotation des étoiles à neutrons, ou d'autres sources qui restent encore un mystère. Il est constitué à près de 89% de simples protons, de 9% de particules alpha, de 1% de noyaux plus lourds (comme l'oxygène, le carbone, l'azote ou le fer) et 1% d'électrons, se déplaçant à très grande vitesse à travers l'univers. Bien que leurs gamme énergétique est extrêmement large, il est prévu depuis les années (1966) qu'il existe un seuil (la limite GZK), qui est l'énergie maximale au delà de laquelle aucun rayon cosmique ne sera observer sur terre.

Cette limite est due au fait que pendant leur voyage dans l'univers, les rayons cosmiques interagissent avec les photons issus du fond diffus cosmologique. Ce dernier, appelé aussi rayonnement fossile, est un rayonnement électromagnétique d'énergie très basse (le maximum d'énergie est rayonné à une fréquence voisine de 160 GHz qui correspond à une longueur d'onde légèrement inférieure à 2 mm, domaine des micro-ondes) et de température dans les environs de 3 *kelvins*. Il est considéré comme le reste de l'époque dense et chaude qu'a connu l'univers il y a 13 milliard d'années et il est présent partout dans l'espace. Selon les calculs basés sur la relativité restreinte d'Einstein, quand les rayons cosmiques dont l'énergie est supérieure à $5.\,10^{19}$ eV rencontrent les photons du l'oceans du fond diffus cosmologique qui remplit tout, il va y avoir l'une des interactions suivantes :

$$\gamma + p \longrightarrow \Delta^+ \longrightarrow p + \pi^0 \qquad ou \qquad \gamma + p \longrightarrow \Delta^+ \longrightarrow n + \pi^+$$

où γ désigne un photon du rayonnement cosmologique, p une particule du rayon cosmique, Δ^+ une particule intermédiaire, qui va se désintégrer soit en un proton p ou bien un neutron n, et dans les deus cas, il y aura aussi création d'un pion π. Donc, un rayon cosmique d'origine lointaine ne devrait jamais atteindre la terre avec une énergie supérieure à 5.10^{19} eV à cause ces interactions. C'est ce qui constitue la limite GZK prédite par l'américain Greisen et indépendamment par les russes Zatsepin et Kuzmin dès 1966.

Le paradoxe du rayonnement cosmique [34, 35], appelé aussi le paradoxe GZK vient du fait qu'en 2003 [40], des observations faites par l'observatoire astronomique AGASA (*Akeno Giant Air Shower Array*, ou en français : *Réseau d'Akeno pour les Cascades Géantes Atmosphériques*) situé au Japon, semblent révéler que des rayons cosmiques peuvent arriver sur terre avec une énergie supérieure à limite GZK, c'est à dire supérieure à $E_{GZK} \simeq 10^{19}$

eV (le rayon le plus énergétique est de $3,2.10^{20}$ eV). Tandis qu'on cherchait à donner des explications à cette anomalie en remettant en doute la précision des observations et la source de ces rayons cosmiques très énergétiques car la limite GZK ne s'applique qu'aux sources distantes, il y a eu des physiciens qui ont proposé des nouvelles théories type DSR en espérant qu'elles apporteront une solution convaincante à ce paradoxe. Leur idée est de modifier la relation de dispersion énergie-impulsion pour les domaines des énergies très élevées car la limite GZK est calculée à base de celle de la relativité restreinte.

Des années après, des observations faites par le détecteur HiRes (The High Resolution Fly's Eye) opérant au désert d'Ultah aux États Unis et par l'observatoire astronomique Pierre-Auger inauguré en 2008 près de la ville de Malargüe en Argentine ont infirmé les résultats obtenus par l'expérience AGASA en observant la limite GZK [41, 42]. Le télescope array (TA) qui est le réseau de détecteurs le plus étendu de l'hémisphère Nord dédié à la recherche de rayons cosmiques, situé aux États-Unis, a aussi obtenu un spectre d'énergie en accord avec la limite GZK [43], ce qui constitue une autre réfutation de plus des observations de l'expérience AGASA.

En conclusion, nous pouvons dire qu'à présent, la DSR repose seulement sur les exigences de la gravité quantique à boucles, à savoir, la nécessité de l'aspect discontinu de l'espace-temps pour faire de la physique à l'échelle de Planck.

1.3.2 κ-espace de Minkowski et κ-algèbre de Lorentz

Récemment, la géométrie non commutative est devenue un outil très puissant pour aborder certains problèmes de la physique théorique. L'essai de Feynman sur la quantification directement à partir des équations du mouvement sans faire appel ni à un lagrangien ni à un hamiltonien [57, 60, 61, 62, 68, 69, 80, 81, 83, 84], plus certains résultats de la quantification des systèmes hamiltoniens avec contraintes à l'aide du crochet de Dirac [11], ont donné naissance à la mécanique quantique non commutative dont le cadre mathématique est la géométrie non commutative. Cette nouvelle mécanique impose la non commutativité entre les coordonnés en plus de celle entre les coordonnées et les moments conjugués, chose étrange à la mécanique quantique standard. De nombreuses études ont été faites dans le cadre de la géométrie non commutative, et des résultats remarquables ont été obtenus [33, 36, 68, 69], ce qui a fait d'elle une voie qui mérite d'être investie.

Après la publication des travaux de Amelino Camelia [34, 35, 36, 39, 37, 38], et Magueijo-Smolin [28, 29, 30] sur la relativité restreinte déformée (DSR), il s'est avéré qu'il existe un espace non commutatif compatible avec cette théorie, permettant de retrouver ses résultats d'une manière élégante et très cohérente. Il s'agit du κ-espace-temps de Minkowski [49, 50, 31] qui diffère de l'espace-temps de Minkowski classique (ordinaire) par ces crochets de Poisson déformés . Cela veut dire que les coordonnées $(c\,t, x, y, z) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ appartenant au κ-espace-temps de Minkowski obéissent aux crochets de Poisson suivants :

$$\{x^i, x^j\} = 0 \qquad \{x^i, x^0\} = x^i/\kappa. \tag{1.97}$$

On remarque directement que seul le crochet de Poisson où intervient la coordonnée temporelle ct change d'expression. On dit qu'on a déformé l'espace-temps de Minkowski, et le

nombre réel κ est le paramètre de déformation dont on précisera la valeur après.

Supposons maintenant qu'une particule occupe le point (x^0, x^1, x^2, x^3) du κ-espace-temps de Minkowski avec l'énergie $E = p^0 c$ et l'impulsion $(p_x = p^1, p_y = p^2, p_z = p^3)$. Cette particule est appelée une κ-particule et l'espace des phases qui lui associé est le κ-espace des phases de Minkowski dont les crochets de Poisson sont

$$\begin{cases} \{x^i, x^j\} = 0 & \{x^i, x^0\} = x^i/\kappa \\ \{p^i, p^j\} = 0 & \{p^i, p^0\} = 0 \\ \{x^i, p^j\} = \delta^{ij} = -\eta^{ij} & \{x^0, p^0\} = -1 + p^0/\kappa \\ \{x^i, p^0\} = 0 & \{x^0, p^i\} = p^i/\kappa. \end{cases} \tag{1.98}$$

La première remarque à constater est que le secteur spatiale reste identique au cas classique. Autrement dit, il n'y a que les relations où les composantes temporelles apparaissent qui sont déformée mais, elles retrouvent leurs formes classique si le paramètre $\kappa \longrightarrow +\infty$. Le contenu de l'équation (1.98) peut être réécrit sous la forme condensée

$$\{x^\mu, x^\nu\} = \frac{1}{\kappa}(x^\mu \delta_0^\nu - x^\nu \delta_0^\mu) \qquad \{p^\mu, p^\nu\} = 0 \qquad \{x^\mu, p^\nu\} = -\eta^{\mu\nu} + \frac{1}{\kappa}\delta_0^\mu p^\nu \tag{1.99}$$

qui est équivalente à la forme

$$\{x_\mu, x_\nu\} = \frac{1}{\kappa}(x_\mu \delta_{\nu 0} - x_\nu \delta_{\mu 0}) \qquad \{x_\mu, p_\nu\} = -\eta_{\mu\nu} + \frac{1}{\kappa}\delta_{\mu 0} p_\nu \qquad \{p_\mu, p_\nu\} = 0. \tag{1.100}$$

A ce stade, il faut savoir que ces crochets de Poisson déformés ne peuvent pas être obtenus à l'aide de la définition (1.58), mais on va continuer d'admettre qu'ils vérifient les propriétés (1.59). A vrai dire, en utilisant les crochets (1.100), il est possible de définir le crochet de Poisson déformé de deux foctions f et g du $\kappa-$espace des phases par l'expression

$$\{f, g\} = \{x_\mu, x_\nu\}\frac{\partial f}{\partial x_\mu}\frac{\partial g}{\partial x_\nu} + \{x_\mu, p_\nu\}\left(\frac{\partial f}{\partial x_\mu}\frac{\partial g}{\partial p_\nu} - \frac{\partial f}{\partial p_\nu}\frac{\partial g}{\partial x_\mu}\right) + \{p_\mu, p_\nu\}\frac{\partial f}{\partial p_\mu}\frac{\partial g}{\partial p_\nu}. \tag{1.101}$$

Le but de cette section est de construire le κ-groupe de transformations de Lorentz, et cela après avoir déformé les relations de commutations fondamentales. Comme dans le cas classique, le moment cinétique est toujours considéré comme le générateur du κ-groupe de transformations de Lorentz, mais à condition d'utiliser les relations (1.100). Mais avant de procéder à la recherche de ce groupe, on peut se demander quel est impact de cette déformation sur l'algèbre de Lorentz établie à la section précédente en (1.95).

Le moment cinétique d'une $\kappa-$particule occupant le point x_μ et ayant le moment conjuguée p_ν est défini comme dans le cas classique par la formule

$$J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu. \tag{1.102}$$

Maintenant, on doit calculer le crochet de Poisson de $\{J_{\mu\nu}, J_{\rho\gamma}\}$ pour connaître le sort de l'algèbre de Lorentz standard. En utilisant les relations de commutation (1.100), les propriétés (1.100) et la définition (1.101), on obtient les résultats suivants :

1.
$$\{J_{\mu\nu}, x_\rho\} = \eta_{\rho\nu}x_\mu - \eta_{\rho\mu}x_\nu + \frac{1}{\kappa}(p_\mu\delta_{\nu 0} - p_\nu\delta_{\mu 0})x_\rho \tag{1.103}$$

2.
$$\{J_{\mu\nu}, p_\rho\} = -\eta_{\mu\rho}p_\nu + \eta_{\nu\rho}p_\mu - \frac{1}{\kappa}(\delta_{\nu 0}p_\mu - \delta_{\mu 0}p_\nu)p_\rho \tag{1.104}$$

3.
$$\{J_{\mu\nu}, x_\rho p_\gamma\} = -\eta_{\mu\gamma}p_\nu x_\rho + \eta_{\nu\gamma}p_\mu x_\rho + \eta_{\rho\nu}x_\mu p_\gamma - \eta_{\rho\mu}x_\nu p_\gamma \tag{1.105}$$

4.
$$\begin{aligned}\{J_{\mu\nu}, J_{\rho\gamma}\} = &-\eta_{\mu\gamma}p_\nu x_\rho + \eta_{\nu\gamma}p_\mu x_\rho + \eta_{\rho\nu}x_\mu p_\gamma - \eta_{\rho\mu}x_\nu p_\gamma \\ &+\eta_{\mu\rho}p_\nu x_\gamma - \eta_{\nu\rho}p_\mu x_\gamma - \eta_{\gamma\nu}x_\mu p_\rho + \eta_{\gamma\mu}x_\nu p_\rho\end{aligned}$$

Finalement, le résultat est

$$\{J_{\mu\nu}, J_{\rho\gamma}\} = -\eta_{\mu\rho}J_{\nu\gamma} + \eta_{\nu\rho}J_{\mu\gamma} - \eta_{\nu\gamma}J_{\mu\rho} + \eta_{\mu\gamma}J_{\nu\rho}. \tag{1.106}$$

Il est facile de voir en comparant cette relation avec la relation (1.95) que l'algèbre de Lorentz reste la même dans les deux cas classique et déformé, et cela malgré la déformation des relations de commutation (crochets de Poisson) des variables fondamentales. Il s'ajoute à cela le fait que dans les équations (1.103) et (1.104) le terme de la déformation s'annule quand les indices μ et ν sont spatiaux. Autrement dit,

$$\{J_{ij}, x_\rho\} = \eta_{\rho j}x_i - \eta_{\rho i}x_j, \tag{1.107}$$

$$\{J_{ij}, p_\rho\} = -\eta_{i\rho}p_j + \eta_{j\rho}p_i. \tag{1.108}$$

Ces formules sont analogues aux formules (1.91) établies pour le cas classique. Une fois de plus, ce sont les crochets où interviennent les composantes temporelles qui sont déformés, mais il suffit de faire tendre le paramètre de déformation κ vers l'infini pour retrouver les résultats classiques.

1.3.3 κ-transformation de Lorentz des moments conjugués

1.3.3-a κ-transformation de Lorentz infinitésimale des moments conjugués

Pour construire le groupe de Lorentz déformé, ou tout simplement le κ-groupe de Lorentz, on va commencer par les transformations infinitésimales des coordonnées et des moments conjugués. Comme le moments cinétique $J_{\mu\nu}$ est le générateur du κ-groupe de Lorentz, on peut s'en servir pour exprimer la variation infinitésimale δf de n'importe quelle quantité $f(x,p)$ fonction des coordonnées et des moments conjugués en utilisant l'équation (1.94) :

$$\delta f = \{-\frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}J_{\mu\nu}, f(x,p)\} \tag{1.109}$$

où les $\omega^{\mu\nu}$ sont six paramètres réels infinitésimaux tels que $\omega^{\mu\nu} = -\omega^{\nu\mu}$. Dans ce paragraphe, on s'intéressera à la variation (transformation) infinitésimale des moments conjugués

dans le cadre du κ-groupe de Lorentz. Pour ce faire, il suffit de prendre l'équation (1.109) et de remplacer $f(x,p)$ par p^{γ}.

$$\delta p^{\gamma} = \{-\frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}J_{\mu\nu}, p^{\gamma}\} = -\frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}\eta^{\gamma\rho}\{J_{\mu\nu}, p_{\rho}\}. \tag{1.110}$$

En se servant de la relation (1.104), on obtient

$$\delta p^{\gamma} = \frac{1}{2}\omega^{\gamma\nu}p_{\nu} - \frac{1}{2}\omega^{\mu\gamma}p_{\mu} + \frac{1}{2\kappa}(\omega^{\mu 0}p_{\mu} - \omega^{0\nu}p_{\nu})p^{\gamma}.$$

L'antisymétrie des paramètres $\omega^{\mu\nu}$ et le fait que ν est un indice muet impliquent que

$$\delta p^{\gamma} = -\omega^{\mu\gamma}p_{\mu} + \frac{1}{\kappa}\omega^{\mu 0}p_{\mu}p^{\gamma}. \tag{1.111}$$

Donc, si p^{γ} se transforme en p'^{γ} dans une $\kappa-$transformation infinitésimale de Lorentz, alors

$$\delta p^{\gamma} = p'^{\gamma} - p^{\gamma} = -\omega^{\mu\gamma}p_{\mu} + \frac{1}{\kappa}\omega^{\mu 0}p_{\mu}p^{\gamma}. \tag{1.112}$$

Dans la suite, on va se limiter au cas où seul $\omega^{01} = -\omega^{10} = \delta u$ sont non nuls. Cette restriction est dans le but de construire un groupe de transformations à un seul paramètre, chose possible du point de vue calcul. Si on explicite l'équation (1.111) pour les différentes valeurs de l'indice γ en prenant en considération la restriction précédente, on aura l'ensemble des équations

$$\begin{cases} \delta p_t = (-p_x + \frac{1}{\kappa}p_x p_t)\,\delta u \qquad \delta p_y = \frac{1}{\kappa}p_x p_y\,\delta u \\ \delta p_x = (-p_t + \frac{1}{\kappa}p_x p_x)\,\delta u \qquad \delta p_z = \frac{1}{\kappa}p_x p_z\,\delta u \end{cases} \tag{1.113}$$

sachant que $p^{\,0} = p_{\,0}$; $p^{\,i} = -p_i$, et que $p^{\,0} = p_t = E/c$; $p^1 = p_x$; $p^2 = p_y$; $p^3 = p_z$. On remarque que toutes les variations infinitésimals dépendent de p_x, même δp_y et δp_z, chose absente dans le cas classique (avant la déformation).

1.3.3-b κ-transformation finie des moments conjugués

Nous avons vu que la propriété la plus remarquable d'un groupe de Lie de transformations réside dans le fait qu'à partir d'une transformation infinitésimale on peut remonter aux transformations finies. C'est en principe le contenu du premier théorème fondamental de Lie. Dans notre cas, la transformation finie des moments conjugués est la solution du système différentiel ci-dessous déduit de la transformation infinitésimale (1.113).

$$\begin{cases} \frac{dp'_t}{du} = -p'_x + \frac{1}{\kappa}p'_x p'_t \qquad \frac{dp'_y}{du} = \frac{1}{\kappa}p'_x p'_y \\ \frac{dp'_x}{du} = -p'_t + \frac{1}{\kappa}p'_x p'_x \qquad \frac{dp'_z}{du} = \frac{1}{\kappa}p'_x p'_z. \end{cases} \tag{1.114}$$

Les inconnues sont les moments conjugués p'_t, p'_x, p'_y, et p'_z et la variable est u qui n'est rien d'autre que le paramètre réel du groupe de Lorentz spécial déformé.

A présent, passons à la résolution : en effet, à partir des équations (1.114), on obtient la relation

$$\frac{1}{p'_t + p'_x}\frac{d(p'_t + p'_x)}{du} - \frac{1}{p'_t - p'_x}\frac{d(p'_t - p'_x)}{du} = -2 \tag{1.115}$$

d'où

$$\frac{d}{du}[\,\ln(\frac{p'_t + p'_x}{p'_t - p'_x})\,] = -2. \tag{1.116}$$

Après une intégration directe

$$\ln(\frac{p'_t + p'_x}{p'_t - p'_x}) = -2u + C^{te} \quad \Longrightarrow \quad \frac{p'_t + p'_x}{p'_t - p'_x} = A\,e^{-2u} \tag{1.117}$$

où A et C^{te} sont des constantes d'intégrations arbitraires, il en résulte l'égalité

$$p'_x = \frac{-1 + Ae^{-2u}}{1 + Ae^{-2u}}\,p'_t. \tag{1.118}$$

Remplaçons dans la première équation de système différentiel (1.114)

$$\frac{dp'_t}{du} = (\frac{1 - Ae^{-2u}}{1 + Ae^{-2u}})(p'_t - \frac{p'^2_t}{\kappa}). \tag{1.119}$$

Nous sommes alors en présence d'une équation différentielle à variables séparables d'où l'équation

$$\int \frac{\kappa}{\kappa p'_t - p'^2_t}\,dp'_t = \int \frac{(1 - Ae^{-2u})}{(1 + Ae^{-2u})}\,du. \tag{1.120}$$

Après intégration et simplification

$$Ae^{-u} + e^{u} = \frac{1}{B}\frac{p'_t}{p'_t - \kappa} \qquad \Longrightarrow \qquad p'_t = \frac{-\kappa(Be^{u} + ABe^{-u})}{1 - (Be^{u} + ABe^{-u})}, \tag{1.121}$$

où B est une constante réelle. Maintenant, en redéfinissant les constantes d'intégration A et B tel que $A = \frac{C-D}{C+D}$ et $B = \frac{C+D}{-\kappa}$, on aura le résultat

$$p'_t = \frac{C\cosh(u) + D\sinh(u)}{1 + \frac{1}{\kappa}[C\cosh(u) + D\sinh(u)]}. \tag{1.122}$$

L'étape suivante est la détermination de p'_x en utilisant la première équation du système différentiel (1.114) et cela en remplaçant p'_t par sa valeur ci-dessus.

$$\frac{dp'_t}{du} = -p'_x + \frac{1}{\kappa}p'_x p'_t \qquad \Longrightarrow \qquad p'_x = \frac{\kappa}{p'_t - \kappa}\frac{dp'_t}{du} \tag{1.123}$$

ce qui nous permet de conclure que

$$p'_x = -\frac{C\sinh(u) + D\cosh(u)}{1 + \frac{1}{\kappa}[C\cosh(u) + D\sinh(u)]}. \tag{1.124}$$

Les valeurs des constantes d'intégration C et D sont déterminées par la condition $p'_t = p_t$ et $p'_x = p_x$ quand le paramètre $u = 0$, ce qui va nous donner les expressions

$$p'_t = \frac{p_t\cosh(u) - p_x\sinh(u)}{1 + \frac{1}{\kappa}[\,p_t(\cosh(u) - 1) - p_x\sinh(u)]} \tag{1.125}$$

$$p'_x = \frac{p_x\cosh(u) - p_t\sinh(u)}{1 + \frac{1}{\kappa}[\,p_t(\cosh(u) - 1) - p_x\sinh(u)]}. \tag{1.126}$$

Pour déterminer p'_y et p'_z, commençons par poser

$$\alpha = 1 + \frac{1}{\kappa}[p_t(\cosh(u) - 1) - p_x\sinh(u)]. \tag{1.127}$$

D'après (1.124) et (1.127), on a

$$\frac{d\alpha}{du} = \frac{1}{\kappa}\{\sinh(u)p_t - \cosh(u)p_x\} = -\frac{\alpha}{\kappa}p'_x \quad \Longrightarrow \quad p'_x = -\frac{\kappa}{\alpha}\frac{d\alpha}{du}. \tag{1.128}$$

Remplaçons p'_x par cette valeur dans la troisième équation du système différentiel (1.114).

$$\frac{dp'_y}{du} = \frac{1}{\kappa}p'_x p'_y \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{dp'_y}{du} = -\frac{1}{\alpha}\frac{d\alpha}{du}p'_y, \tag{1.129}$$

équation que l'on peut résoudre en séparant les variables comme suit :

$$\frac{dp'_y}{p'_y} = \frac{-d\alpha}{\alpha} \qquad \Longrightarrow \qquad p'_y = \frac{F}{\alpha} = \frac{F}{1 + \frac{1}{\kappa}[p_t(\cosh(u) - 1) - p_x\sinh(u)]} \tag{1.130}$$

où F est une constante d'intégration dont on peut déterminer la valeur avec la condition que $p'_y = p_y$ pour $u = 0$, ce qui veut dire que $F = p_y$. Finalement, on obtient l'expression suivante de p'_y.

$$p'_y = \frac{p_y}{1 + \frac{1}{\kappa}[\,p_t(\cosh(u) - 1) - p_x\sinh(u)]}. \tag{1.131}$$

En suivant la même démarche, on aboutit aussi à l'expression ci-dessous pour p'_z.

$$p'_z = \frac{p_z}{1 + \frac{1}{\kappa}[p_t(\cosh(u) - 1) - p_x\sinh(u)]}. \tag{1.132}$$

Si par analogie à la relativité restreinte (1.28), et pour une raison qui viendra plus tard (1.164), on pose

$$\cosh(u) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_e^2}{c^2}}} = \gamma \qquad \Longrightarrow \qquad \sinh(u) = \frac{\frac{v_e}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v_e^2}{c^2}}} = \frac{v_e}{c}\gamma \tag{1.133}$$

où v_e est un nouveau paramètre réel, la κ-transformation des moments conjuguées prend la forme

$$\begin{cases} E' = \frac{\gamma(E - v_e\, p_x)}{1+\frac{1}{\kappa\, c}\{(\gamma-1)\, E - \gamma\, v_e\, p_x\}} \\ p'_x = \frac{\gamma(p_x - \frac{v_e}{c^2}\, E)}{1+\frac{1}{\kappa\, c}\{(\gamma-1)\, E - \gamma\, v_e\, p_x\}} \\ p'_y = \frac{p_y}{1+\frac{1}{\kappa\, c}\{(\gamma-1)\, E - \gamma\, v_e\, p_x\}} \\ p'_z = \frac{p_z}{1+\frac{1}{\kappa\, c}\{(\gamma-1)\, E - \gamma\, v_e\, p_x\}} \end{cases} \tag{1.134}$$

où $E = cp_t$. Cette transformation a été obtenue pour la première fois par Magueijo et Smolin [28] en déformant les générateurs du groupe de Lorentz, ensuite retrouvée par Ghosh [31] avec la méthode qu'on vient d'exposer ici.

Le paramètre v_e est en effet la vitesse de translation d'un repère inertiel (R') dont les axes sont $(O'X'Y'Z')$ par rapport à un autre repère inertiel (R) dont les axes sont $(OXYZ)$. Cette translation s'effectue selon l'axe des abscisses (OX). Si une particule à une impulsion $\vec{p} = (p_x, p_y, p_z)$ et une énergie E par rapport au repère (R), elle sera vue dans le repère (R') avec une impulsion $\vec{p'} = (p'_x, p'_y, p'_z)$ et une énergie E' liées à celles observées en repère (R) par la transformation (1.134). La remarque qui saute directement aux yeux est la non linéarité de la nouvelle transformation et le fait que les composantes p_y et p_z de l'impulsion, qui sont perpendiculaires à la direction du mouvement relatif, ne restent pas invariantes, ce qui n'est pas le cas en relativité restreinte. En plus de cela, les équations (1.134) possèdent un nouvel invariant absent avant la déformation : en effet, on constate que $\kappa\, c$ doit avoir la dimension d'une énergie et qu'une particule ayant cette énergie dans le repère (R), sera vue dans la repère (R') avec cette même énergie. Un petit calcul montre facilement que si $E = \kappa\, c$, alors

$$E' = \frac{\gamma(\kappa\, c - v\, p_x)}{1 + \frac{1}{\kappa\, c}\{(\gamma-1)\, \kappa\, c - \gamma\, v\, p_x\}} = \frac{\gamma(\kappa\, c - v\, p_x)}{\frac{1}{\kappa\, c}\{\gamma(\kappa\, c - \gamma\, v\, p_x)\}} = \kappa\, c. \tag{1.135}$$

Si on revient aux postulats de la relativité spéciale déformée selon lesquels l'énergie de Planck E_p doit avoir la même valeur dans tous les repères inertiels, il conviendra de poser $\kappa\, c = E_p$, impliquant que $\kappa = \frac{E_p}{c}$. Maintenant, on peut dire que pour des énergies faibles devant l'énergie de Planck E_p, la transformations (1.134) tend vers la transformation de Lorentz ordinaire (1.36) relatives aux moments conjuguées, et que la relativité spéciale déformée n'apporte pas des corrections considérables pour le relativité restreinte sauf dans le domaine des énergies très élevées, difficiles à atteindre actuellement (énergies proches de l'énergie de Planck $E_p = 1,956.10^9 joules$).

1.3.4 Relation de dispersion de Magueijo-Smolin

En relativité restreinte, il est connu que la relation entre l'impulsion $\vec{p} = (p_x, p_y, p_z)$ d'une particule et son énergie E est donnée par la célèbre relation $E^2 - \vec{p}^2 c^2 = m_0^2 c^4$, où m_0 est la masse au repos de notre particule. Le but de ce paragraphe est de trouver une

relation qui va jouer le même rôle dans le cadre de la relativité spéciale déformée en se servant de la transformation (1.134). D'abord, un calcul simple montre que

$$\eta_{\mu\nu}p'^{\mu}p'^{\nu} = \frac{1}{\alpha^2}\,\eta_{\mu\nu}p^{\mu}p^{\nu} \tag{1.136}$$

où $\alpha = 1 + \frac{1}{\kappa}\{(\gamma-1)p_t - \gamma\frac{v_e}{c}p_x\}$ et $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_e^2}{c^2}}}$ comme l'indiquent les équations (1.127) et (1.133). On constate que la quantité $\eta_{\mu\nu}p^{\mu}p^{\nu}$ n'est pas un invariant dans le cadre de la relativité spéciale déformée. En utilisant toujours (1.134), on déduit que

$$\alpha = (1-\frac{p_t}{\kappa})(1-\frac{p'_t}{\kappa})^{-1} = (1-\frac{E}{E_p})(1-\frac{E'}{E_p})^{-1}. \tag{1.137}$$

Remplaçons α par cette valeur dans l'équation (1.136) afin d'obtenir la relation

$$\frac{\eta_{\mu\nu}p'^{\mu}p'^{\nu}}{(1-\frac{p'_t}{\kappa})^2} = \frac{\eta_{\mu\nu}p^{\mu}p^{\nu}}{(1-\frac{p_t}{\kappa})^2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{p'^2_t - p'^2_x - p'^2_y - p'^2_z}{(1-\frac{p'_t}{\kappa})^2} = \frac{p_t^2 - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2}{(1-\frac{p_t}{\kappa})^2} \tag{1.138}$$

qui est invariante par changement de repère dans le cadre de la relativité spéciale déformée. Après multiplication par c^2 (célérité de la lumière), on aura la forme habituelle $\frac{E^2-\vec{p}^{\,2}c^2}{(1-\frac{E}{E_p})^2}$. L'invariance de cette quantité nous permet de déterminer sa valeur dans le repère où notre particule est au repos. Dans ce dernier, son impulsion est nulle, seule son énergie au repos E_0 intervient. Autrement dit :

$$\frac{E^2 - \vec{p}^{\,2}c^2}{(1-\frac{E}{E_p})^2} = \frac{{E_0}^2}{(1-\frac{E_0}{E_p})^2} \tag{1.139}$$

mais, on n'a pas encore trouver la relation entre l'énergie au repos E_0 et la masse au repos m_0 pour une particule massive dans le cadre de la relativité spéciale déformée.

Pour ce faire, nous allons commencer par poser $\frac{E^2-\vec{p}^{\,2}c^2}{(1-\frac{E}{E_p})^2} = M^2c^4$ par analogie à la relation de la relativité restreinte sauf que la valeur de M est inconnue pour l'instant. On en déduit que l'énergie E est donnée par

$$E = \frac{-\frac{M^2c^4}{E_p} + \sqrt{\frac{M^4c^8}{E_p^2} + (1-\frac{M^2c^4}{E_p^2})(|\vec{p}\,|^2c^2 + M^2c^4)}}{1-\frac{M^2c^4}{E_p^2}}. \tag{1.140}$$

En réalité, il y a deux solutions possibles, mais celle qu'on a pris tend vers la relation de la relativité restreinte quand $E_p \longrightarrow +\infty$. Pour fixer la valeur de M, on se sert de l'une des définitions suivantes de la masse au repos d'une particule m_0 (la masse physique) [68, 55]

$$\frac{1}{m_0} = \lim_{|\vec{p}|\longrightarrow 0}\frac{1}{|\vec{p}\,|}\frac{\partial E}{\partial|\vec{p}\,|} \qquad\qquad \frac{1}{m_0} = \lim_{|\vec{p}|^2\longrightarrow 0} 2\,\frac{\partial E}{\partial|\vec{p}\,|^2} \tag{1.141}$$

qui peuvent être appliquées aux cas de la mécanique newtonienne ($E = \frac{|\vec{p}|^2}{2M}$) et de la mécanique relativiste ($E = \sqrt{|\vec{p}|^2c^2 + M^2c^4}$). Dans notre cas,

$$\frac{1}{m_0} = \lim_{|\vec{p}|\longrightarrow 0} \frac{1}{|\vec{p}|}\frac{\partial E}{\partial |\vec{p}|} = \lim_{|\vec{p}|\longrightarrow 0} \frac{c^2E_p^2}{\sqrt{|\vec{p}|^2c^2E_p^2(E_p^2 - M^2c^4) + M^2c^4E_p^4}} = \frac{1}{M} \tag{1.142}$$

ce qui montre que $M = m_0$, et nous permet d'écrire

$$\frac{E^{\,2} - \vec{p}^{\,2}c^2}{(1 - \frac{E}{E_p})^2} = m_0^2c^4. \tag{1.143}$$

Cette relation est la relation de dispersion de Magueijo-Smolin [28] determinant le lien entre l'impulsion spatiale $\vec{p}$, et l'énergie E d'une particule de masse au repos m_0, dans le cadre de la relativité spéciale déformée. Pour des énergies très inférieures devant l'énergie de Planck E_p, cette relation tend vers la relation classique de la relativité restreinte. Pour une particule sans masse ($m_o = 0$) comme c'est le cas pour le photon , elle donne le même résultat que la relation de dispersion relativiste

$$E^{\,2} - \vec{p}^{\,2}c^2 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad E = |\vec{p}|\, c. \tag{1.144}$$

A partir de (1.139) et (1.143), on aboutit à l'énergie au repos E_0 comme suit :

$$\frac{{E_0}^{\,2}}{(1 - \frac{E_0}{E_p})^2} = m_0^2c^4 \quad \Longrightarrow \quad \frac{E_0}{1 - \frac{E_0}{E_p}} = m_0c^2 \quad \Longrightarrow \quad E_0 = \frac{m_0c^2}{1 + \frac{m_0c^2}{E_p}} = \frac{m_0c^2E_p}{E_p + m_0c^2}. \tag{1.145}$$

D'après cette formule, l'énergie au repos E_0 d'une particule massive ne dépasse pas le seuil E_p car $\frac{m_0c^2}{E_p} > 0$.

Pour démonter que la relation de dispersion de Magueijo-Smolin (1.143) est invariante sous toutes les transformations du groupe de Lorentz déformé, il suffit de vérifier que ses crochets de Poisson déformés avec les générateurs de ce groupe ($J_{\mu\nu}$) sont nuls. En effet, à l'aide des relations de commutation (1.100), les propriétés (1.100) et la définition (1.101), on aura ces résultats :

$$\{J_{\mu\nu}, p^2\} = \{J_{\mu\nu}, \eta^{\rho\gamma}p_\rho p_\gamma\} = -\frac{2p^2}{\kappa}(\delta_{\nu 0}p_\mu - \delta_{\mu 0}p_\nu) \tag{1.146}$$

$$\{J_{\mu\nu}, \frac{1}{(1 - \frac{p_0}{\kappa})^2}\} = -\frac{2}{\kappa(1 - \frac{p_0}{\kappa})^2}(\delta_{\mu 0}p_\nu - \delta_{\nu 0}p_\mu) \tag{1.147}$$

donc

$$\{J_{\mu\nu}, \frac{p^2}{(1 - \frac{p_0}{\kappa})^2}\} = p^2\{J_{\mu\nu}, \frac{1}{(1 - \frac{p_0}{\kappa})^2}\} + \frac{1}{(1 - \frac{p_0}{\kappa})^2}\{J_{\mu\nu}, p^2\} = 0. \tag{1.148}$$

On déduit que la quantité $\frac{p^2}{(1-\frac{p_0}{\kappa})^2}$ ne subit aucune variation sous une κ-transformation, ce qui veut dire qu'elle est un invariant du groupe de Lorentz déformé.

1.3.5 κ-transformation finie des coordonnées

A présent, nous allons passer à la recherche de la κ-transformation de lorentz des coordonnées spatio-temporelles. A partir de la relation (1.109), la variation infinitésimale des coordonnées $(ct, x, y, z) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ d'une particule ayant l'énergie $E = c\,p_t$ et l'impulsion (p_x, p_y, p_z) appartenant au κ-espace des phases de Minkowski s'obtient par l'équation

$$\delta x^\gamma = \{-\frac{1}{2}\omega^{\mu\nu} J_{\mu\nu}, x^\gamma\} = -\frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}\eta^{\gamma\rho}\{J_{\mu\nu}, x_\rho\}. \tag{1.149}$$

Ce crochet de Poisson déformé est déjà calculé et il est donné par l'équation (1.103), d'où

$$\delta x^\gamma - \frac{1}{2}[\omega^{\mu\gamma}x_\mu - \omega^{\gamma\nu}x_\nu + \frac{1}{\kappa}(p_\mu\omega^{\mu 0} - p_\nu\omega^{0\nu})x^\gamma],$$

mais l'antisymétrie des paramètres $\omega^{\mu\nu}$ nous permet de déduire que

$$\delta x^\gamma = -\omega^{\mu\gamma}x_\mu - \frac{1}{\kappa}\omega^{\mu 0}p_\mu x^\gamma. \tag{1.150}$$

Dans le but de trouver le groupe de Lorentz déformé à un seul paramètre, supposons que seul $\omega^{01} = -\omega^{10} = \delta u$ est non nul tandis que les autres paramètres le sont. Si l'indice γ prend toutes les valeurs possibles, on obtient

$$\begin{cases} \delta\, ct = -(x + \frac{1}{\kappa}p_x\, ct)\,\delta u & \delta y = -\frac{1}{\kappa}p_x\, y\,\delta u \\ \delta x = -(ct + \frac{1}{\kappa}p_x\, x)\,\delta u & \delta z = -\frac{1}{\kappa}p_x\, z\,\delta u \end{cases} \tag{1.151}$$

où $x^0 = x_0 = ct$, $p^1 = -p_1 = p_x$, et $x^1 = -x_1 = x$; $x^2 = -x_2 = y$; $x^3 = -x_3 = z$. On remarque que les variations des coordonnées dépendent des moments conjugués, chose absente en relativité restreinte.

A partir de cette transformation infinitésimale, on peut construire un groupe de transformations à un paramètre. Ce groupe est un sous-groupe du groupe de Lorentz déformé dépendant de six paramètres réels. La procédure à suivre consiste en premier lieu à résoudre le système différentiel suivant obtenu grâce à la transformation infinitésimale ci-dessus.

$$\begin{cases} \frac{d\,ct'}{du} = -x' - \frac{1}{\kappa}p'_x\, ct' & \frac{dy'}{du} = -\frac{1}{\kappa}p'_x\, y' \\ \frac{dx'}{du} = -ct' - \frac{1}{\kappa}p'_x\, x' & \frac{dz'}{du} = -\frac{1}{\kappa}p'_x\, z'. \end{cases} \tag{1.152}$$

Commençons la résolution en remplaçant p'_x par son expression (1.128) dans les deux premières équations du système différentiel précédent :

$$\frac{d\,ct'}{du} = -x' + \frac{ct'}{\alpha}\frac{d\alpha}{du} \qquad \frac{dx'}{du} = -ct' + \frac{x'}{\alpha}\frac{d\alpha}{du} \tag{1.153}$$

où $\alpha = 1 + \frac{1}{\kappa}\{(\cosh(u) - 1)p_t - \sinh(u)p_x\}$ comme le montre bien l'équation (1.127). Comme

$$\frac{d}{du}(\frac{ct'}{\alpha}) = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{d\,ct'}{du} - \frac{ct'}{\alpha}\frac{d\alpha}{du}\right) \qquad \frac{d}{du}(\frac{x'}{\alpha}) = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{dx'}{du} - \frac{x'}{\alpha}\frac{d\alpha}{du}\right), \tag{1.154}$$

les équations précédentes (1.153) impliquent que

$$\frac{d}{du}(\frac{ct'}{\alpha}) = -\frac{x'}{\alpha} \qquad\qquad \frac{d}{du}(\frac{x'}{\alpha}) = -\frac{ct'}{\alpha}. \tag{1.155}$$

Posons $\phi = \frac{ct'}{\alpha}$ et $\chi = -\frac{x'}{\alpha}$, ce qui va donner le système linéaire

$$\frac{d\phi}{du} = -\chi \qquad \frac{d\chi}{du} = -\phi \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{d^2\phi}{du^2} = \phi$$

qui s'intègre facilement pour donner les solutions

$$\phi = A\cosh(u) + B\sinh(u) \qquad \Longrightarrow \qquad \chi = -A\sinh(u) - B\cosh(u)$$

où A et B sont des constantes d'intégrations réelles et arbitraires. Revenons aux variables initiales et remplaçons α par son expression afin d'obtenir

$$ct' = \left[1 + \frac{1}{\kappa}\{(\cosh(u) - 1)p_t - \sinh(u)p_x\}\right](A\cosh(u) + B\sinh(u)) \tag{1.156}$$

$$x' = \left[1 + \frac{1}{\kappa}\{(\cosh(u) - 1)p_t - \sinh(u)p_x\}\right](A\sinh(u) + B\cosh(u)). \tag{1.157}$$

La condition $x' = x$ et $t' = t$ pour $u = 0$ est réalisée si $A = ct$ et $B = -x$, d'où la transformation des coordonnées x et ct :

$$x' = \left[1 + \frac{1}{\kappa}\{(\cosh(u) - 1)\frac{E}{c} - \sinh(u)p_x\}\right](x\cosh(u) - ct\sinh(u)) \tag{1.158}$$

$$t' = \left[1 + \frac{1}{\kappa}\{(\cosh(u) - 1)\frac{E}{c} - \sinh(u)p_x\}\right](t\cosh(u) - \frac{x}{c}\sinh(u)) \tag{1.159}$$

Revenons maintenant à y' : à partir du système différentiel (1.152) et de la relation (1.128), on obtient

$$\frac{dy'}{du} = -\frac{1}{\kappa}p'_x y' = \frac{1}{\alpha}y'\frac{d\alpha}{du} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{dy'}{y'} = \frac{d\alpha}{\alpha} \qquad \Longrightarrow \qquad y' = C\alpha \tag{1.160}$$

où C est constante d'intégration. Si on pose $C = y$, nous seront sûrs que $y = y'$ quand $u = 0$, donc la coordonnée y se transforme comme suit :

$$y' = \alpha\, y = [1 + \frac{1}{\kappa}\{(\cosh(u) - 1)\frac{E}{c} - \sinh(u)p_x\}]\, y. \tag{1.161}$$

En suivant les mêmes étapes, nous trouverons que z se transforme d'une manière analogue

$$z' = \alpha\, z = [1 + \frac{1}{\kappa}\{(\cosh(u) - 1)\frac{E}{c} - \sinh(u)p_x\}]\, z. \tag{1.162}$$

Maintenant, supposons que (ct, x, y, z) représentent les coordonnées d'une particule par rapport à un repère (R) ayant une énergie E et une impulsion (p_x, p_y, p_z). Cette particule

sera vue dans un autre repère (R') en translation selon l'axe (OX) avec une vitesse v_e, avec les coordonnées (ct', x', y', z'). Dans le but d'exprimer u en fonction de v_e, imaginons le cas où notre particule est immobile à l'origine du repère (R'), donc son abscisse $x' = 0$ quelque soit l'instant t'. Mais par rapport à R, elle se déplace avec la vitesse $v_x = v_e$ qui est aussi la vitesse de translation du repère (R'). Utilisons la relation (1.158) avec $x' = 0$ pour aboutir au résultat

$$x\cosh(u) - ct\sinh(u) = 0$$

ensuite prenons la différentielle totale

$$dx\cosh(u) - c\,dt\sinh(u) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{dx}{dt} = v_x = c\,\tanh(u) = v_e. \tag{1.163}$$

L'égalité ci-dessus peut être inversée comme suit :

$$\tanh(u) = \frac{v_e}{c} \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{1 - \frac{1}{\cosh^2(u)}} = \frac{v_e}{c} \quad \Longrightarrow \quad \cosh(u) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_e^2}{c^2}}} = \gamma \tag{1.164}$$

d'où on déduit que $\sinh(u) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_e^2}{c^2}}}\frac{v_e}{c} = \gamma\frac{v_e}{c}$, et ainsi on obtient la transformation

$$\begin{cases} x' = \alpha\,\gamma\,(x - v_e t) \\ t' = \alpha\,\gamma\,(t - \frac{v_e}{c^2}x) \\ y' = \alpha\,y \\ z' = \alpha\,z \end{cases} \tag{1.165}$$

où $\alpha = 1 + \frac{1}{E_p}\{(\gamma - 1)E - \gamma v_e p_x\}$.

Cette transformation qu'on appelle la κ-transformation de Lorentz des coordonnées obtenue par Magueijo, Medeiros, et Kimberly [30], ensuite retrouvée par Ghosh [31] et Wu-Gao [76] avec d'autres méthodes, ressemble à celle de la relativité restreinte (1.27), sauf qu'elle est multipliée par le facteur α qui dépend de l'énergie et de l'impulsion de la particule en question. Donc, en relativité spéciale déformée, la cinématique et la cinétique sont inséparables contrairement à la relativité restreinte et à la mécanique newtonienne. En plus, on remarque que les coordonnées y et z subissent une dilation, chose absente en relativité restreinte. Mais pour des énergies faibles devant E_p, la transformation (1.165) tend vers la transformation de Lorentz ordinaire, car le facteur $\alpha \longrightarrow 1$ quand $E_p \longrightarrow \infty$.

1.3.6 κ-composition des vitesses

Après avoir obtenu la κ-transformation de Lorentz (1.165), il convient d'analyser son impact sur l'invariant spatio-temporel s^2 et sur la loi de composition des vitesses. Une simple manipulation montre que la quantité $\eta_{\mu\nu}x^{\,\mu}x^{\,\nu}$ cesse d'être invariante en relativité spéciale déformée car

$$\eta_{\mu\nu}x'^{\mu}x'^{\nu} = \alpha^2\,\eta_{\mu\nu}x^{\,\mu}x^{\,\nu}$$

mais d'après (1.137)

$$\alpha^2 = \left(1 - \frac{p_t}{\kappa}\right)^2 \left(1 - \frac{p'_t}{\kappa}\right)^{-2},$$

d'où l'égalité

$$\left(1 - \frac{p'_t}{\kappa}\right)^2 (c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2) = \left(1 - \frac{p_t}{\kappa}\right)^2 (c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2), \tag{1.166}$$

ce qui traduit le fait qu'en relativité spéciale déformée l'invariant spatio-temporel s^2 est

$$s^2 = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \left(1 - \frac{p_t}{\kappa}\right)^2. \tag{1.167}$$

Il est clair que $s^2 \longrightarrow \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu$ quand $\kappa \longrightarrow \infty$, d'où l'invariant de la relativité restreinte.

Passons à présent à la loi de composition des vitesses d'une κ-particule. Ce qui nous préoccupe vraiment est la vérification que la célérité de la lumière dans le vide c reste invariante par changement de repère dans le cadre de la relativité spéciale déformée. Nous allons nous intéresser au cas d'une κ-particule libre, vu que les photons de la lumière sont des particule libre qui se déplace avec la vitesse c. D'après (1.165), on a la différentielle

$$dt' = d\alpha\ \gamma(t - \frac{v_e}{c^2}\, x) + \alpha\gamma \left(dt - \frac{v_e}{c^2}\, dx\right), \tag{1.168}$$

mais $d\alpha = 0$ parce que α ne dépend que des moments conjugués qui se conservent naturellement dans le cas d'une particule libre ($\alpha = C^{te}$), donc

$$dt' = \alpha\gamma(dt - \frac{v_e}{c^2}\, dx). \tag{1.169}$$

Pour les mêmes raisons, on a aussi

$$dx' = \alpha\gamma(dx - v_e dt) \qquad dy' = \alpha\, dy \qquad dz' = \alpha\, dz. \tag{1.170}$$

Les équations précédentes nous montrent que

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\alpha\gamma(dx - v_e dt)}{\alpha\gamma(dt - \frac{v_e}{c^2}\, dx)} = \frac{v_x - v_e}{1 - \frac{v_e}{c^2}\, v_x} \tag{1.171}$$

$$v'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{\alpha\, dy}{\alpha\gamma(dt - \frac{v_e}{c^2}\, dx)} = \frac{v_y}{\gamma(1 - \frac{v_e}{c^2} v_x)} \tag{1.172}$$

$$v'_z = \frac{dz'}{dt'} = \frac{\alpha\, dz}{\alpha\gamma(dt - \frac{v_e}{c^2}\, dx)} = \frac{v_z}{\gamma(1 - \frac{v_e}{c^2} v_x)}. \tag{1.173}$$

Ces transformations de vitesses sont identiques au cas de la relativité restreinte, chose qui assure l'invariance de la vitesse de la lumière c. Donc, le deuxième principe de la relativité spéciale déformée est satisfait, en plus du troisième selon le quel l'énergie E_p est invariante par changement de repère.

1.3.7 Variables canoniques

Il existe une transformation des variables de l'espace des phases déformé vers d'autres variables qui va nous permettre de faire le lien entre la relativité restreinte et la relativité spéciale déformée. Ces nouvelles variables qu'on va appelées canoniques, vont jouer un rôle determinant dans la quantification qui fera l'objet du prochain chapitre. Ces variables canoniques notées X^μ et P^μ s'expriment en fonction des variables habituelles x^μ et p^μ par les relations

$$P_\mu = \frac{p_\mu}{1 - \frac{p_0}{\kappa}} \tag{1.174}$$

$$X_\mu = x_\mu \left(1 - \frac{p_0}{\kappa}\right). \tag{1.175}$$

La première transformation est apparue dans un article de Jafari-Shariati [71], et elle est complétée par la deuxième transformation dans l'article [31] de Ghosh et Pal.

Calculons les crochets de Poisson déformés de ces variables canoniques en utilisant les relations de commutation (1.100), les propriétés (1.100) et la définition (1.101).

1. Puisque les p_μ commutent entre eux, alors

$$\{P_\mu, P_\nu\} = 0. \tag{1.176}$$

2. Posons $\chi = \left(1 - \frac{p_0}{\kappa}\right)$ et passons au crochet $\{X_\mu, X_\nu\}$.

$$\{X_\mu, X_\nu\} = \chi^2\{x_\mu, x_\nu\} + \chi\, x_\nu\{x_\mu, \chi\} + \chi\, x_\mu\{\chi, x_\nu\},$$

mais d'après (1.101), on a

$$\{x_\mu, \chi\} = \frac{\delta_{\mu 0}}{\kappa}\chi,$$

d'où

$$\{X_\mu, X_\nu\} = 0 \tag{1.177}$$

3. On termine avec le crochet $\{X_\mu, P_\nu\}$ sachant que $\{\chi, p_\nu\} = 0$.

$$\{X_\mu, P_\nu\} = \chi\, p_\nu\{x_\mu, \frac{1}{\chi}\} + \{x_\mu, p_\nu\}.$$

Toujours d'après la définition des crochets déformés (1.101)

$$\{x_\mu, \frac{1}{\chi}\} = -\frac{\delta_{\mu 0}}{\kappa\chi},$$

d'où

$$\{X_\mu, P_\nu\} = -\eta_{\mu\nu}. \tag{1.178}$$

Effectivement, les crochets de Poissons des variables canoniques X_μ et P_ν sont identiques au cas non déformé (1.60), ce qui va nous permettre de conclure que l'algèbre de Lorentz (1.106) va rester invariante si on continue à travailler avec ces variables canoniques.

Les transformations (1.174) et (1.175) peuvent être inversées et il est facile de vérifier que le résultat sera

$$p_\mu = \frac{P_\mu}{(1+\frac{P_0}{\kappa})} \tag{1.179}$$

$$x_\mu = X_\mu \left(1+\frac{P_0}{\kappa}\right). \tag{1.180}$$

A ce stade, on peut commencer la démonstration que les variables canoniques se transforment après un changement de repère à l'aide d'une transformation de Lorentz ordinaire sans le facteur de déformation α. En utilisant la transformation (1.134), on obtient :

1.
$$\frac{p'_t}{1-\frac{p'_t}{\kappa}} = \gamma\left(\frac{p_t}{1-\frac{p_t}{\kappa}} - \frac{v}{c}\frac{p_x}{1-\frac{p_t}{\kappa}}\right) \quad \Rightarrow \quad P'_t = \gamma(P_t - \frac{v}{c}P_x); \tag{1.181}$$

2.
$$\frac{p'_x}{1-\frac{p'_t}{\kappa}} = \gamma\left(\frac{p_x}{1-\frac{p_t}{\kappa}} - \frac{v}{c}\frac{p_t}{1-\frac{p_t}{\kappa}}\right) \quad \Rightarrow \quad P'_x = \gamma(P_x - \frac{v}{c}P_t); \tag{1.182}$$

3.
$$\frac{p'_y}{1-\frac{p'_t}{\kappa}} = \frac{p_y}{1-\frac{p_t}{\kappa}} \quad \Rightarrow \quad P'_y = P_y; \tag{1.183}$$

et d'une manière analogue, on trouve que $P'_z = P_z$.

Maintenant, à l'aide de la transformation (1.165), on aura aussi :

1.
$$ct'\left(1-\frac{p'_t}{\kappa}\right) = \gamma\left(ct - \frac{v}{c}x\right)\left(1-\frac{p_t}{\kappa}\right) \quad \Rightarrow \quad cT' = \gamma\left(cT - \frac{v}{c}X\right); \tag{1.184}$$

2.
$$x'\left(1-\frac{p'_t}{\kappa}\right) = \gamma(x-vt)\left(1-\frac{p_t}{\kappa}\right) \quad \Rightarrow \quad X' = \gamma(X-vT); \tag{1.185}$$

3.
$$y'\left(1-\frac{p'_t}{\kappa}\right) = y\left(1-\frac{p_t}{\kappa}\right) \quad \Rightarrow \quad Y' = Y; \tag{1.186}$$

Un calcul similaire au précédent, montre que $Z' = Z$.

Après les développements qu'on vient de faire, on constate qu'effectivement les variables (X^μ, P^μ) sont canoniques parce que leurs crochets de Poisson sont canoniques (non déformés), et elles obéissent à des transformations de Lorentz ordinaires identiques au cas de la relativité restreinte. Les conséquences de ce fait sont très importantes car cela va nous permettre de transformer les formules et les relations de la relativité restreinte de telle sorte qu'elles soient valables en relativité spéciale déformée en les écrivant d'abord

en fonction des variables canoniques (X^μ, P^μ), pour passer ensuite aux variables habituelles (x^μ, p^μ). Par exemple, l'énergie, l'impulsion, la relation de dispersion et la longueur spatio-temporelle s, s'obtiennent facilement :

$$\vec{p} = \frac{\vec{P}}{1+\frac{P_t}{\kappa}} \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{p} = \frac{\gamma_{\vec{v}}\, m_o \vec{v}}{1+\frac{\gamma_{\vec{v}}\, m_o c}{\kappa}} \tag{1.187}$$

$$p_t = \frac{P_t}{1+\frac{P_t}{\kappa}} \qquad \Longrightarrow \qquad p_t = \frac{\gamma_{\vec{v}}\, m_o\, c}{1+\frac{\gamma_{\vec{v}}\, m_o c}{\kappa}} \tag{1.188}$$

$$\eta_{\mu\nu} P^\mu P^\nu = m_o^2\, c^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\eta_{\mu\nu} p^\mu p^\nu}{(1-\frac{p_t}{\kappa})^2} = m_o^2\, c^2 \tag{1.189}$$

$$s^2 = \eta_{\mu\nu} X^\mu X^\nu \qquad \Longrightarrow \qquad s^2 = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu (1-\frac{p_t}{\kappa})^2 \tag{1.190}$$

1.4 Transformations non canoniques

Dans cette dernière section de ce chapitre, nous allons généraliser la procédure discutée ci-dessus afin de montrer que les crochets déformés peuvent être le résultat d'une transformation non canonique à partir d'un système décrit par des crochets de Poisson canoniques. Soit donc le lagrangien régulier $L = L(X, \dot{X})$ qui va donner les équations d'Euler-Lagrange

$$\dot{P}_i = \frac{\partial L}{\partial X_i} \quad \text{avec} \quad P_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{X}_i} \qquad i = 1, ..., N. \tag{1.191}$$

La transformation de Legendre nous permet de déduire le hamiltonien [4]

$$H(X, P) = P_i \dot{X}_i - L(X, \dot{X}) \tag{1.192}$$

et d'obtenir les équations canoniques de Hamilton

$$\begin{cases} \dot{X}_i = \frac{\partial H}{\partial P_i} = \{X_i, X_j\}\, \frac{\partial H}{\partial X_j} + \{X_i, P_j\}\, \frac{\partial H}{\partial P_j} \\ \dot{P}_i = -\frac{\partial H}{\partial X_i} = \{P_i, X_j\}\, \frac{\partial H}{\partial X_j} + \{P_i, P_j\}\, \frac{\partial H}{\partial P_j} \end{cases} \tag{1.193}$$

d'où les crochets de Poisson canoniques

$$\{X_i, P_j\} = \delta_{ij} \qquad \{X_i, X_j\} = \{P_i, P_j\} = 0. \tag{1.194}$$

Soit maintenant la transformation $X = X(x, p)$ et $P = P(x, p)$ qui n'est pas forcément canonique. En utilisant les équations de Hamilton ci-dessus, il est facile de voir que

$$dH = \frac{\partial H}{\partial X_i} dX_i + \frac{\partial H}{\partial P_i} dP_i = -\dot{P}_i dX_i + \dot{X}_i dP_i. \tag{1.195}$$

4. Dans cette section, on va sommer sur les indices répétés deux fois dans une expression mathématique.

En remplaçant par les nouvelles variables,

$$\begin{aligned} dH = &-\left(\frac{\partial P_i}{\partial x_j}\dot{x}_j + \frac{\partial P_i}{\partial p_j}\dot{p}_j\right)\left(\frac{\partial X_i}{\partial x_k}dx_k + \frac{\partial X_i}{\partial p_k}dp_k\right) \\ &+\left(\frac{\partial X_i}{\partial x_j}\dot{x}_j + \frac{\partial X_i}{\partial p_j}\dot{p}_j\right)\left(\frac{\partial P_i}{\partial x_k}dx_k + \frac{\partial P_i}{\partial p_k}dp_k\right). \end{aligned} \tag{1.196}$$

Alors

$$\begin{aligned} dH = &\left[\left(-\frac{\partial P_i}{\partial x_j}\frac{\partial X_i}{\partial x_k} + \frac{\partial X_i}{\partial x_j}\frac{\partial P_i}{\partial x_k}\right)\dot{x}_j + \left(-\frac{\partial P_i}{\partial p_j}\frac{\partial X_i}{\partial x_k} + \frac{\partial X_i}{\partial p_j}\frac{\partial P_i}{\partial x_k}\right)\dot{p}_j\right]dx_k \\ &+\left[\left(-\frac{\partial P_i}{\partial x_j}\frac{\partial X_i}{\partial p_k} + \frac{\partial X_i}{\partial x_j}\frac{\partial P_i}{\partial p_k}\right)\dot{x}_j + \left(-\frac{\partial P_i}{\partial p_j}\frac{\partial X_i}{\partial p_k} + \frac{\partial X_i}{\partial p_j}\frac{\partial P_i}{\partial p_k}\right)\dot{p}_j\right]dp_k. \end{aligned} \tag{1.197}$$

Sachant que d'un autre côté que $dH = \frac{\partial H}{\partial x_k}dx_k + \frac{\partial H}{\partial p_k}dp_k$, les équations de Hamilton vont prendre la forme non canonique

$$\begin{cases} \left(-\frac{\partial P_i}{\partial x_j}\frac{\partial X_i}{\partial x_k} + \frac{\partial X_i}{\partial x_j}\frac{\partial P_i}{\partial x_k}\right)\dot{x}_j + \left(-\frac{\partial P_i}{\partial p_j}\frac{\partial X_i}{\partial x_k} + \frac{\partial X_i}{\partial p_j}\frac{\partial P_i}{\partial x_k}\right)\dot{p}_j = \frac{\partial H}{\partial x_k} \\ \left(-\frac{\partial P_i}{\partial x_j}\frac{\partial X_i}{\partial p_k} + \frac{\partial X_i}{\partial x_j}\frac{\partial P_i}{\partial p_k}\right)\dot{x}_j + \left(-\frac{\partial P_i}{\partial p_j}\frac{\partial X_i}{\partial p_k} + \frac{\partial X_i}{\partial p_j}\frac{\partial P_i}{\partial p_k}\right)\dot{p}_j = \frac{\partial H}{\partial p_k} \end{cases} \tag{1.198}$$

et sous forme matricielle,

$$A\dot{x} + B\dot{p} = \frac{\partial H}{\partial x} \qquad C\dot{x} + D\dot{p} = \frac{\partial H}{\partial p}. \tag{1.199}$$

Ce système se résout en utilisant le fait que toutes les matrices sont inversibles vu que notre transformation est régulière, et sa solution est

$$\begin{cases} \dot{x} = (B^{-1}A - D^{-1}C)^{-1}\left(B^{-1}\frac{\partial H}{\partial x} - D^{-1}\frac{\partial H}{\partial p}\right) \\ \dot{p} = (A^{-1}B - C^{-1}D)^{-1}\left(A^{-1}\frac{\partial H}{\partial x} - C^{-1}\frac{\partial H}{\partial p}\right). \end{cases} \tag{1.200}$$

A partir de ces équations, on en déduit facilement les crochets

$$\begin{cases} \{x_i, x_j\} = ((B^{-1}A - D^{-1}C)^{-1}B^{-1})_{ij} \\ \{x_i, p_j\} = -\left((B^{-1}A - D^{-1}C)^{-1}D^{-1}\right)_{ij} = -((A^{-1}B - C^{-1}D)^{-1}A^{-1})^T_{ij} \\ \{p_i, p_j\} = -\left((A^{-1}B - C^{-1}D)^{-1}C^{-1}\right)_{ij}. \end{cases} \tag{1.201}$$

Il est clair que ces crochets sont complètement déformés et loin des crochets de Poisson simples et canoniques. Cela nous montre que suite à une transformation non canonique, les crochets subissent une déformation et perdent leur forme habituelle, contrairement au cas bien connu des transformations canoniques.

Dans le cas de la DSR, il suffit de commencer par le lagrangien $L = \frac{1}{2}m\eta_{\mu\nu}\dot{X}^\mu\dot{X}^\nu$ décrivant une particule relativiste ($\dot{X}^\mu = \frac{dX^\mu}{d\tau}$), ce qui va donner naissance aux moments

$P^\mu = m\dot{X}^\mu$ et au hamiltonien $H = \frac{1}{2m}\eta_{\mu\nu}P^\mu P^\nu$. Ensuite, il faut effectuer la transformation déjà vue $X^\mu = x^\mu\left(1 - \frac{p^0}{k}\right)$ et $P^\mu = p^\mu\left(1 - \frac{p^0}{k}\right)^{-1}$ afin de retrouver la relation de Magueijo-Smolin et les crochets déformés relatifs au κ-espace des phases de Minkowski comme le montre bien les calculs de la sous-section précédente.

Afin de ne pas refaire des calculs dont on connait déjà l'issue, nous allons prendre un autre exemple plus simple qui est celui d'une particule de masse m et de charge q en présence d'un champ électromagnétique $(A_{_X}(X,Y), A_{_Y}(X,Y), U(X,Y))$ à deux dimensions. Dans ce cas, le lagrangien est de la forme

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) + q\left(\dot{X}A_{_X} + \dot{Y}A_{_Y}\right) - qU$$

et les moments conjugués sont

$$P_{_X} = m\dot{X} + qA_{_X} \qquad\qquad P_{_Y} = m\dot{Y} + qA_{_Y}.$$

Cela va nous conduire au hamiltonien bien connu

$$H = \frac{1}{2m}\left((P_{_X} - qA_{_X})^2 + (P_{_Y} - qA_{_Y})^2\right) + qU$$

et aux seuls crochets de Poisson non nuls

$$\{X, P_{_X}\} = 1 \qquad\qquad \{Y, P_{_Y}\} = 1.$$

Afin de faire coïncider les moments avec les impulsions, opérons ce changement de variables

$$X = x \qquad Y = y \qquad P_{_X} = p_x + qA_x(x,y) \qquad P_{_Y} = p_y + qA_y(x,y)$$

qui va se traduire par cette expression simple du hamiltonien précédent

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2\right) + qU$$

où le potentiel vecteur est complètement absorbé. Remplaçons dans (1.198) afin d'accéder aux équations de mouvement

$$\begin{cases} \dot{x}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \\ q\left(\frac{\partial A_j}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k}{\partial x_j}\right)\dot{x}_j - \dot{p}_k = \frac{\partial H}{\partial x_k} \end{cases}$$

qui peuvent s'écrire explicitement sous la forme ($B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$)

$$\begin{cases} -\dot{p}_x + qB_z\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial x} \\ \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} \\ -qB_z\dot{x} - \dot{p}_y = \frac{\partial H}{\partial y} \\ \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 & qB_z & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -qB_z & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{p}_x \\ \dot{y} \\ \dot{p}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial x} \\ \frac{\partial H}{\partial p_x} \\ \frac{\partial H}{\partial y} \\ \frac{\partial H}{\partial p_y} \end{bmatrix}.$$

Après inversion, on aboutit aux équations de Hamilton

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{p}_x \\ \dot{y} \\ \dot{p}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & qB_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -qB_z & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_x H \\ \partial_{p_x} H \\ \partial_y H \\ \partial_{p_y} H \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} \\ \dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} + qB_z \frac{\partial H}{\partial p_y} \\ \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_y} \\ \dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} - qB_z \frac{\partial H}{\partial p_x} \end{cases}$$

d'où les crochets déformés relatifs aux variables (x, p_x, y, p_y)

$$\{x, p_x\} = 1 \qquad \{p_x, p_y\} = qB_z = q\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) \qquad \{y, p_y\} = 1$$

tandis que les autres crochets sont nuls. Précisément, c'est le crochet $\{p_x, p_y\}$ qui a subi un changement de telle sorte qu'on y voit réapparaître le potentiel vecteur déjà absorbé dans l'expression du hamiltonien. Autrement dit, après une transformation non canonique, l'interaction avec le potentiel vecteur (A_x, A_y) est transposée du hamiltonien H aux crochets $\{p_x, p_y\}$.

Dans un deuxième exemple, prenons le lagrangien de l'oscillateur harmonique $L = \frac{1}{2}m(\dot{X}^2+\dot{Y}^2)-\frac{1}{2}m\omega^2(X^2+Y^2)$. Cette fois-ci, les moments conjugués sont $P_{_X} = m\dot{X}$ et $P_{_Y} = m\dot{Y}$, et le hamiltonien $H = \frac{1}{2m}\left(P_{_X}^2 + P_{_Y}^2\right) + \frac{1}{2}m\omega^2(X^2+Y^2)$. Les crochets de Poisson non nuls sont $\{X, P_{_X}\} = 1$ et $\{Y, P_{_Y}\} = 1$. Procédons à ce stade à la transformation non canonique

$$X = x - \frac{\theta}{2}p_y \qquad Y = y + \frac{\theta}{2}p_x \qquad P_{_X} = p_x \qquad P_{_Y} = p_y \qquad \theta \in \mathbb{R}$$

d'où la nouvelle expression du hamiltonien

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2\right) + \frac{1}{2}m\omega^2\left(x^2 + y^2 + \theta(yp_x - xp_y) + \frac{1}{4}\theta^2\left(p_x^2 + p_y^2\right)\right).$$

A partir de (1.198), on aura les équations du mouvement

$$\begin{cases} -\dot{p}_k = \frac{\partial H}{\partial x_k} \\ \dot{x}_k + \left(-\frac{\partial X_j}{\partial p_k} + \frac{\partial X_k}{\partial p_j}\right)\dot{p}_j = \frac{\partial H}{\partial p_k} \end{cases}$$

qui peuvent s'écrire explicitement sous la forme

$$\begin{cases} -\dot{p}_x = \frac{\partial H}{\partial x} \\ \dot{x} + \theta\dot{p}_y = \frac{\partial H}{\partial p_x} \\ -\dot{p}_y = \frac{\partial H}{\partial y} \\ \dot{y} - \theta\dot{p}_x = \frac{\partial H}{\partial p_y} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{p}_x \\ \dot{y} \\ \dot{p}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \theta & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -\theta & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_x H \\ \partial_{p_x} H \\ \partial_y H \\ \partial_{p_y} H \end{bmatrix}.$$

Il en découle les crochets déformés suivants :

$$\{x, p_x\} = 1 \qquad \{x, y\} = \theta \qquad \{y, p_y\} = 1$$

tandis que les autres crochets sont nuls. Il est clair que les nouvelles coordonnées ne commutent pas ($\{x, y\} = \theta$), ce qui est une caractéristique fondamentale qui va engendrer une mécanique quantique non commutative après la quantification canonique.

Pour récapituler, nous avons démontré qu'une transformation non canonique peut être à l'origine des crochets de Poisson déformés qui sont à la base de la mécanique quantique non commutative et de la DSR.

Chapitre 2

L'équation de Dirac Déformée

L'équation de Dirac est un des piliers de la théorie quantique et du modèle standard de la physique des particules. Elle est écrite en 1928 par le physicien britannique Paul Dirac dans le but de généraliser la démarche de Schrödinger au cas relativiste, et d'éviter les paradoxes et les difficultés liés à l'équation de Klein-Gordon. Cette équation a pu remédier aux problèmes, même bien au-delà, elle s'est montrée capable de prédire des résultats physiques importants, à savoir, l'existence du positron, l'antiparticule de l'électron, le dédoublement des niveaux d'énergie de l'atome d'Hydrogène avec beaucoup plus de précision, etc ...Après la théorie de la "seconde quantification" des champs, elle est devenue l'équation du champs spinoriel, indispensable pour étudier les processus de création et l'annihilation des particules fermioniques.

L'origine de l'équation de Dirac vient évidement de la relation de dispersion énergie-impulsion bien connue en relativité restreinte, mais surtout du génie de Dirac qui a pensé à une procédure exceptionnelle pour enfin écrire une équation linéaire du premier ordre par rapport au temps, invariante, et symétrique du point de vue relativiste.

Cette relation de dispersion prend une forme différente dans le cadre de la relativité spéciale déformée. Elle est remplacée par la relation de Magueijo-Smolin (1.143), ce qui nous amène à nous préoccuper de la forme que doit alors prendre l'équation de Dirac une fois déformée. Dans ce chapitre, nous allons tout d'abord essayer d'écrire l'équation de Dirac déformée dans l'espace des moments conjugués et chercher le spectre d'énergie d'une κ-particule libre afin de le comparer au cas non déformé de la relativité restreinte. Par la suite, nous allons essayer de travailler dans l'espace des positions en construisant un principe de correspondance déformé compatible avec les crochets déformés de la DSR, ce qui va nous permettre d'écrire et d'étudier les équations de Klein-Gordon et de Dirac déformées, mais cette fois-ci dans l'espace des positions.

2.1 L'équation de Dirac en relativité restreinte

Le but de cette partie est de rappeler les principales propriétés de l'équation de Dirac dont nous aurons besoin dans la deuxième partie qui sera consacrée à l'équation de Dirac

dans le cadre de la relativité spéciale déformée. Pour plus de détails et d'informations, la consultation des références [8, 10, 12, 15, 16, 17] sera très utile et bénéfique.

2.1.1 Le principe de correspondance et l'équation de Klein-Gordon

Pour écrire une équation quantique susceptible de décrire l'état d'une particule relativiste, la démarche la plus naturelle réside dans l'utilisation du principe de correspondance et de la relation de dispersion énergie-impulsion. Autrement dit, en partant des crochets de Poisson fondamentaux (1.60)

$$\{x^\mu, x^\nu\} = 0 \qquad \{x^\mu, p^\nu\} = -\eta^{\mu\nu} \qquad \{p^\mu, p^\nu\} = 0, \tag{2.1}$$

il faut d'abord trouver des opérateurs différentiels $\hat{X}^\mu$ et $\hat{P}^\nu$ tels que leurs commutateurs obéissent aux règles (Algèbre de Heisenberg)

$$\left[\hat{X}^\mu, \hat{X}^\nu\right] = 0 \qquad \left[\hat{X}^\mu, \hat{P}^\nu\right] = -i\hbar\eta^{\mu\nu} \qquad \left[\hat{P}^\mu, \hat{P}^\nu\right] = 0,$$

ce qui est possible si on prend $\hat{X}^\mu = x^\mu$ et $\hat{P}^\nu = i\hbar\partial^\nu$. Explicitement,

$$\begin{array}{llll} \hat{X}^1 = x^1 = x & \hat{X}^2 = x^2 = y & \hat{X}^3 = x^3 = z & \hat{X}^0 = x^0 = ct \\ \hat{P}^1 = i\hbar\frac{\partial}{\partial x_1} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x} & \hat{P}^2 = i\hbar\frac{\partial}{\partial x_2} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial y} & \hat{P}^3 = i\hbar\frac{\partial}{\partial x_3} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial z} & \hat{P}^0 = i\hbar\frac{\partial}{\partial x_0} = i\hbar\frac{\partial}{c\partial t}. \end{array} \tag{2.2}$$

Le démarche directe d'avoir une équation linéaire à partir de la relation de dispersion énergie-impulsion de la relativité restreinte $E - \sqrt{\vec{p}^2c^2 + m_o^2c^4} = 0$, est de l'écrire sous la forme $E^2 = \vec{p}^2c^2 + m_o^2c^4$. Maintenant, avec le principe de correspondance ci-dessus, nous obtenons l'équation de Klein-Gordon d'une particule libre

$$\left(-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2} + c^2\hbar^2\Delta + m_o^2c^4\right)\phi(t, \vec{r}) = 0 \tag{2.3}$$

qu'on peut réécrire sous la forme

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \left(\frac{m_oc}{\hbar}\right)^2\right)\phi = 0, \tag{2.4}$$

d'où la forme covariante ci-dessous.

$$\left(\partial^\mu\partial_\mu - \left(\frac{m_oc}{\hbar}\right)^2\right)\phi = 0. \tag{2.5}$$

C'est une équation aux dérivées partielles linéaire du second ordre par rapport au temps ainsi qu'à l'espace. Donc, pour déterminer complètement $\phi(x)$ à n'importe quel instant ultérieur à l'instant initial t_0, il faut connaître simultanément $\phi(t_0, \vec{r})$ et sa dérivée $\frac{\partial\phi}{\partial t}(t_0, \vec{r})$ à cet instant initial, chose absente en théorie quantique non relativiste où il suffit de connaître la fonction d'onde à l'instant initial pour déterminer son évolution ultérieure.

L'invariance relativiste de l'équation de Klein-Gordon est évidente et immédiate de fait que dans une transformation de Lorentz l'opérateur $\partial^\mu\partial_\mu$ est invariant, et $\phi(x)$ est un scalaire.

L'équation de Klein-Gordon sous sa forme (2.3) ne peut pas se mettre sous la forme

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\phi = \hat{H}\phi \tag{2.6}$$

où $\hat{H}$ est opérateur différentiel linéaire. Donc, il semble qu'il n'existe pas de hamiltonien pour l'équation de Klein-Gordon, ce qui n'est pas souhaitable du tout en mécanique quantique, car l'opérateur hamiltonien joue un rôle fondamental dans la détermination de l'opérateur d'évolution et des grandeurs qui se conservent.

Pour remédier à cette situation, il est possible de transformer notre équation en équation du premier ordre par rapport au temps t, ce qui va nous permettre d'en déduire un hamiltonien [21]. Ecrivons d'abord l'équation de Klein-Gordon sous la forme

$$\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi(\overrightarrow{r},t) = \left(-\hbar^2c^2\Delta + m^2c^4\right)\phi(\overrightarrow{r},t) \tag{2.7}$$

ensuite, introduisons deux nouvelles fonctions $\varphi(\overrightarrow{r},t)$ et $\chi(\overrightarrow{r},t)$ de telle sorte que

$$\begin{cases} \varphi(\overrightarrow{r},t) + \chi(\overrightarrow{r},t) = \phi(\overrightarrow{r},t) \\ mc^2\left(\varphi(\overrightarrow{r},t) - \chi(\overrightarrow{r},t)\right) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\phi(\overrightarrow{r},t). \end{cases} \tag{2.8}$$

Remplaçons maintenant dans (2.7) afin d'obtenir l'équation

$$mc^2 i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left(\varphi - \chi\right) = \left(-\hbar^2c^2\Delta + m^2c^4\right)\left(\varphi + \chi\right). \tag{2.9}$$

Sachant que la deuxième équation de (2.8) est équivalente à

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left(\varphi + \chi\right) = mc^2\left(\varphi - \chi\right) \tag{2.10}$$

il est possible d'en déduire que

$$\begin{cases} i\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{-\hbar^2}{2m}\Delta(\varphi+\chi) + mc^2\varphi \\ i\hbar\frac{\partial\chi}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m}\Delta(\varphi+\chi) - mc^2\chi \end{cases} \tag{2.11}$$

d'où l'équation matricielle

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix}\varphi\\ \chi\end{bmatrix} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varphi\\ \chi\end{bmatrix} + mc^2\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varphi\\ \chi\end{bmatrix}. \tag{2.12}$$

Finalement, cette équation aura la forme réduite (qui est aussi la forme de Schrödinger)

$$i\hbar\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\left(\sigma^3 + i\sigma^2\right) + mc^2\sigma^3\right)\Phi \tag{2.13}$$

où $\Phi = [\varphi \ \ \chi]^t$ et $\{\sigma^0, \sigma^1, \sigma^2, \sigma^3\}$ sont les matrices de Pauli. On en déduit que l'opérateur hamiltonien associé à l'équation de Klein-Gordon est

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\left(\sigma^3 + i\sigma^2\right) + mc^2\sigma^3. \tag{2.14}$$

C'est un opérateur différentiel et matriciel qui peut agir sur des fonctions à deux composantes. Cependant, l'équation (2.13) est du premier degré par rapport au temps, du deuxième degré par rapport à l'espace, ce qui viole la symétrie exigée par la relativité. Il s'ajoute à cela le fait que l'équation de Klein-Gordon reste toujours une équation qui décrit une particule de spin 0, d'où la nécessité d'une autre équation relativiste pour le spin 1/2.

2.1.2 L'équation de Dirac

Dans le but de trouver une équation d'onde relativiste de premier ordre par rapport au temps, ce qui implique qu'elle sera aussi du premier ordre par rapport aux coordonnées spatiales afin que la symétrie relativiste entre les coordonnées spatio-temporelles soit apparente, Dirac a suivi la démarche historique suivante : au lieu de prendre le carré de la relation de dispersion énergie-impulsion $E = \sqrt{\vec{p}^2c^2 + m_o^2c^4}$, il a plutôt cherché à la mettre sous la forme

$$E = c\vec{\alpha}.\vec{p} + \beta m_o c^2 \tag{2.15}$$

où $\vec{\alpha}$ et β sont des entités dont on précisera la nature par la suite. Le choix de cette forme est dû à deux raisons : la première est la linéarité et la deuxième est la symétrie entre les variables (coordonnées) spatio-temporelles quand on va passer à la version quantique ($\hat{E} = i\hbar\partial_t$ et $\overrightarrow{\hat{p}} = -i\hbar\vec{\nabla}$).

Maintenant, il faut que

$$E^2 = \left(c\vec{\alpha}.\vec{p} + \beta m_o c^2\right)^2 \qquad \Rightarrow \qquad c^2\vec{p}^2 + m_o^2c^4 = \left(c\vec{\alpha}.\vec{p} + \beta m_o c^2\right)^2. \tag{2.16}$$

Nous avons

$$\begin{aligned}\left(c\vec{\alpha}.\vec{p} + \beta m_o c^2\right)^2 &= \left(c\vec{\alpha}.\vec{p} + \beta m_o c^2\right)\left(c\vec{\alpha}.\vec{p} + \beta m_o c^2\right) \\ &= c\vec{\alpha}.\vec{p}\ c\vec{\alpha}.\vec{p} + c\vec{\alpha}.\vec{p}\beta m_o c^2 + \beta m_o c^2 c\vec{\alpha}.\vec{p} + \beta m_o c^2 \beta m_o c^2\end{aligned}$$

d'où l'égalité

$$\left(c\vec{\alpha}.\vec{p} + \beta m_o c^2\right)^2 = c^2\ \vec{\alpha}.\vec{p}\ \vec{\alpha}.\vec{p} + m_o c^3\left(\vec{\alpha}.\vec{p}\ \beta + \beta\ \vec{\alpha}.\vec{p}\right) + \beta^2 m_o^2 c^4. \tag{2.17}$$

Par identification avec l'équation (2.16), on aboutit aux relations

$$\begin{cases} \vec{\alpha}.\vec{p}\ \vec{\alpha}.\vec{p} = \vec{p}^2 \\ \vec{\alpha}.\vec{p}\ \beta + \beta\vec{\alpha}.\vec{p} = 0 \\ \beta^2 = 1 \end{cases} \tag{2.18}$$

Explicitement, cela revient à dire que

$$\begin{cases} (\alpha^1)^2\ (p_1)^2+(\alpha^2)^2\ (p_2)^2+(\alpha^3)^2\ (p_3)^2+(\alpha^1\alpha^2+\alpha^2\alpha^1)\ p_1p_2+(\alpha^1\alpha^3+\alpha^3\alpha^1)\ p_1p_3 \\ +(\alpha^2\alpha^3+\alpha^3\alpha^2)\ p_2p_3=\ (p_1)^2+(p_2)^2+(p_3)^2 \\ (\beta\alpha^1+\alpha^1\beta)\ p_1+(\beta\alpha^2+\alpha^2\beta)\ p_2+(\beta\alpha^3+\alpha^3\beta)\ p_3=0 \\ \beta^2=1. \end{cases} \tag{2.19}$$

Pour que ces relations soient justes indépendamment des $p_i, i \in \{1,2,3\}$, il faut que

$$\begin{cases} (\alpha^1)^2=(\alpha^2)^2=(\alpha^3)^2=\beta^2=1 \\ \alpha^i\alpha^j+\alpha^j\alpha^i=\alpha^i\beta+\beta\alpha^i=0 \qquad\qquad i\neq j. \end{cases} \tag{2.20}$$

Ces relations ne peuvent être satisfaites par des nombres réels. En effet, il s'agit de matrices carrées 4×4 à éléments complexes qui sont données en représentation standard par

$$\beta=\begin{pmatrix} I_{2\times2} & 0 \\ 0 & -I_{2\times2} \end{pmatrix} \qquad\qquad \alpha^i=\begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} \tag{2.21}$$

où $I_{2\times2}=\sigma^0=\sigma_0$ est la matrices identité 2×2, et les σ^i sont les matrice de Pauli

$$\sigma^1=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=-\sigma_1 \qquad \sigma^2=\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}=-\sigma_2 \qquad \sigma^3=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=-\sigma_3. \tag{2.22}$$

Les matrices α^i et β sont aussi hermitiennes, ce qui veut dire que

$$(\alpha^i)^\dagger=\alpha^i \qquad ; \qquad \beta^\dagger=\beta \tag{2.23}$$

où le symbole "†" indique la matrice adjointe (la transposée de la matrice conjuguée).

A ce stade, le principe de correspondance $\vec{p}\to-i\hbar\vec{\nabla}$, nous permet d'avoir le hamiltonien de Dirac

$$\hat{H}_D=-i\hbar c\,\alpha^i\partial_i+\beta m_oc^2=-i\hbar c\,\vec{\alpha}.\vec{\nabla}+\beta m_oc^2 \tag{2.24}$$

ainsi que l'équation de Dirac d'une particule libre de masse m_0, dont la forme est donnée par

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=\hat{H}_D\psi=\{-i\hbar c\,\vec{\alpha}.\vec{\nabla}+\beta m_oc^2\}\,\psi. \tag{2.25}$$

Il est clair que la fonction d'onde $\psi(x)=\psi(\vec{r},t)$ doit être un vecteur-colonne à quatre composantes

$$\psi(x)=\begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \psi_3(x) \\ \psi_4(x) \end{pmatrix} \tag{2.26}$$

ce qui fait de l'équation de Dirac un système différentiel de quatre équations aux dérivées partielles.

Pour montrer la symétrie et la covariance relativiste de l'équation de Dirac, commençons par introduire les matrices γ^μ définies par les relations

$$\gamma^0 = \beta \qquad \gamma^i = \beta\alpha^i. \tag{2.27}$$

Les relations (2.20) impliquent que les matrices γ^μ vérifient les équations suivantes :

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2\,\eta^{\mu\nu} \quad \Longrightarrow \quad (\gamma^0)^2 = 1 \quad (\gamma^1)^2 = (\gamma^2)^2 = (\gamma^3)^2 = -1 \tag{2.28}$$

et

$$(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0 \qquad (\gamma^i)^\dagger = (\beta\alpha^i)^\dagger = (\alpha^i)^\dagger\beta^\dagger = \alpha\beta = -\beta\alpha = -\gamma^i. \tag{2.29}$$

Pour obtenir la forme covariante de l'équation (2.25), il suffit de la multiplier à gauche par la matrice $\frac{1}{\hbar c}\beta$ et d'utiliser les définitions (2.27). L'équation résultante est donnée par

$$i\gamma^0\partial_0\psi = \left(-i\gamma^i\partial_i + \frac{m_o c}{\hbar}\right)\,\psi$$

d'où

$$\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - \frac{m_o c}{\hbar}\right)\,\psi = 0. \tag{2.30}$$

On va conclure ce paragraphe par cette remarque importante. Puisque l'équation de Dirac a un hamiltonien bien déterminé, on va s'en servir pour montrer qu'elle décrit bien une particule de spin 1/2. Au début, démontrons que le moment cinétique orbital $\hat{\vec{L}} = -i\hbar\vec{r}\wedge\vec{\nabla}$ n'est pas une grandeur conservée. Cela revient à vérifier que les trois composantes du $\hat{\vec{L}}$ ne commutent pas avec le hamiltonien de Dirac $\hat{H}_D$ (2.24). Ces dernières s'expriment en fonction de tenseur de Levi-Civita complètement antisymétrique ε^{ijk} défini par

$$\varepsilon^{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si les indices } i\,j\,k \text{ sont une permutation paire des indices } 1\,2\,3 \\ -1 & \text{si les indices } i\,j\,k \text{ sont une permutation impaire des indices } 1\,2\,3 \\ 0 & \text{si deux indices sont égaux.} \end{cases} \tag{2.31}$$

On choisit aussi $\varepsilon^{123} = 1$, alors les composantes du moment cinétique vont s'exprimer sous la forme

$$\hat{L}^i = i\hbar\,\varepsilon^{ijk}x_j\partial_k \tag{2.32}$$

où $\hat{L}^1 = \hat{L}_x$, $\hat{L}^2 = \hat{L}_y$, et $\hat{L}^3 = \hat{L}_z$. Calculons maintenant le commutateur $[\hat{H}_D, \hat{L}^j]$.

$$\begin{aligned}[\hat{H}_D, \hat{L}^j] \quad &= [-i\hbar c\,\alpha^i\partial_i + \beta m_o c^2\ ,\ i\hbar\,\varepsilon^{jkh}x_k\partial_h] = [-i\hbar c\,\alpha^i\partial_i\ ,\ i\hbar\,\varepsilon^{jkh}x_k\partial_h] \\ &= \hbar^2 c\,\alpha^i\varepsilon^{jkh}[\partial_i, x_k\partial_h] = \hbar^2 c\,\alpha^i\varepsilon^{jkh}[\partial_i, x_k]\partial_h = -\hbar^2 c\,\alpha^i\delta_{ik}\varepsilon^{jkh}\partial_h\end{aligned}$$

d'où

$$[\hat{H}_D, \hat{L}^j] = -\hbar^2 c\,\varepsilon^{jih}\alpha^i\partial_h = -\hbar^2 c\,\varepsilon^{jki}\alpha^k\partial_i. \tag{2.33}$$

Ce résultat montre que le moment cinétique orbital n'est pas conservé, donc le moment cinétique du spin doit être non nul pour que le moment cinétique total de la particule (libre) soit conservé pour des considérations physiques (symétrie sous l'action du groupe

des rotations qui est un sous−groupe du groupe de Lorentz). Calculons maintenant le commutateur $[\hat{H}_D, \frac{\hbar}{2}\Sigma^j]$ sachant que

$$\Sigma^j = \begin{pmatrix} \sigma^j & 0 \\ 0 & \sigma^j \end{pmatrix} \qquad \Leftrightarrow \qquad \vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} \tag{2.34}$$

Mais d'abord, il faut savoir que les matrices σ^i de Pauli vérifient la propriété suivante de l'algèbre $su(2)$:

$$[\frac{\sigma^i}{2}, \frac{\sigma^j}{2}] = -i\,\varepsilon^{ijk}\frac{\sigma_k}{2} = 2i\,\varepsilon^{ijk}\frac{\sigma^k}{2}. \tag{2.35}$$

Il est préférable de calculer les commutateurs $[\beta, \Sigma^j]$ et $[\alpha^i, \Sigma^j]$ en premier,

$$[\beta, \Sigma^j] = \begin{pmatrix} I_{2\times2} & 0 \\ 0 & -I_{2\times2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sigma^j & 0 \\ 0 & \sigma^j \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sigma^j & 0 \\ 0 & \sigma^j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_{2\times2} & 0 \\ 0 & -I_{2\times2} \end{pmatrix}$$

$$[\beta, \Sigma^j] = 0 \tag{2.36}$$

et

$$\begin{aligned}[\alpha^i, \Sigma^j] &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sigma^j & 0 \\ 0 & \sigma^j \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sigma^j & 0 \\ 0 & \sigma^j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & [\sigma^i, \sigma^j] \\ [\sigma^i, \sigma^j] & 0 \end{pmatrix} = -2i\,\varepsilon^{ijk}\begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ \sigma^k & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

d'où

$$[\alpha^i, \Sigma^j] = 2i\,\varepsilon^{jki}\alpha^k. \tag{2.37}$$

Sachant que

$$[\hat{H}_D, \frac{\hbar}{2}\Sigma^j] = [-i\hbar c\,\alpha^i\partial_i + \beta m_o c^2, \frac{\hbar}{2}\Sigma^j] = -\frac{i}{2}\hbar^2 c\,\partial_i[\alpha^i, \Sigma^j] + \frac{\hbar}{2}m_o c^2[\beta, \Sigma^j], \tag{2.38}$$

et à l'aide des égalités (2.36) et (2.37), on déduit que

$$[\hat{H}_D, \frac{\hbar}{2}\Sigma^j] = +\hbar^2 c\,\varepsilon^{jki}\alpha^k\partial_i. \tag{2.39}$$

A l'aide des égalités (2.33) et (2.39), on voit que

$$[\hat{H}_D, \hat{L}^j + \frac{\hbar}{2}\Sigma^j] = [\hat{H}_D, \hat{L}^j] + [\hat{H}_D, \frac{\hbar}{2}\Sigma^j] = 0 \tag{2.40}$$

donc le moment cinétique qui se conserve est $\vec{\hat{J}} = \vec{\hat{L}} + \vec{S}$ où $\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\Sigma}$, en plus

$$\vec{S}^2 = \frac{\hbar^2}{4}[(\Sigma^1)^2 + (\Sigma^2)^2 + (\Sigma^3)^2] = \frac{3}{4}\hbar^2\,I_{4\times4} = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)\hbar^2 \tag{2.41}$$

preuve que l'équation de Dirac décrit bel et bien une particule relativiste de spin égal à 1/2.

2.1.3 L'équation de Dirac dans l'espace des impulsions

Soit une particule relativiste libre de masse m_o et de spin 1/2. La fonction d'onde ψ qui lui associée est solution de l'équation de Dirac (2.30).

$$\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - \frac{m_o c}{\hbar}\right)\,\psi = 0 \tag{2.42}$$

qui peut se mettre sous la forme (2.25)

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \hat{H}_D\,\psi = \left(-i\hbar c\,\vec{\alpha}.\vec{\nabla} + \beta m_o c^2\right)\,\psi. \tag{2.43}$$

Puisque notre particule est sans interaction avec le milieu extérieur, son hamiltonien $\hat{H}_D = -i\hbar c\,\vec{\alpha}\vec{\nabla} + \beta m_o c^2$ ne dépend pas des coordonnées spatio-temporelles, ce qui fait qu'il commute avec l'opérateur impulsion $\vec{\hat{P}} = -i\hbar\vec{\nabla}$. Nous pouvons donc trouver des fonctions propres communes à ces deux opérateurs. On sait que les fonctions propres de l'opérateur impulsion sont des ondes planes, pour cette raison cherchons des solutions de l'équation (2.42) de la forme

$$\psi(x) = u(p)\,e^{-\frac{i}{\hbar}p_\nu x^\nu} \tag{2.44}$$

où $p = (p^0, p^1, p^2, p^3)$ sont quatre constantes réelles dont on précisera la signification physique après, et $u(p)$ est un spineur à quatre composantes indépendantes des coordonnées x^μ. Autrement dit

$$u(p) = \begin{pmatrix} u_1(p) \\ u_2(p) \\ u_3(p) \\ u_4(p) \end{pmatrix}. \tag{2.45}$$

Injectons cette forme de la solution dans l'équation (2.42), sachant que $\partial_\mu\left(u(p)\,e^{-\frac{i}{\hbar}p_\nu x^\nu}\right) = \frac{i}{\hbar}p_\mu u(p)\,e^{-\frac{i}{\hbar}p_\nu x^\nu}$. L'équation (2.42) devient alors

$$\frac{1}{\hbar}\{\gamma^\mu p_\mu - m_o c\}\;u(p)\;e^{-\frac{i}{\hbar}p_\nu x^\nu} = 0$$

d'où l'on en déduit que le spineur $u(p)$ doit être une solution du système d'équations algébriques

$$\{\gamma^\mu p_\mu - m_o\,c\}\;u(p) = 0. \tag{2.46}$$

Il s'agit de l'équation de Dirac écrite dans l'espace des impulsions qui décrit une particule libre. C'est un système algébrique homogène de quatre équations, ce qui veut dire que le déterminant de la matrice $\gamma^\mu p_\mu - m_o c$ doit être nul pour avoir des solutions différentes de zéro. On ne va pas résoudre directement ce système, on va faire plutôt appel à une transformation spéciale qui fera l'objet du paragraphe qui viendra. Pour l'instant, la multiplication de l'équation (2.46) par la matrice β et l'utilisation des relations $\gamma^0 = \beta$, $\gamma^i = \beta\alpha^i$ nous donne

$$\{\beta\gamma^0 p_0 + \beta\gamma^i p_i - \beta m_0 c\}\;u(p) = 0 \;\;\Longrightarrow \{p^0 - \vec{\alpha}.\vec{p} - \beta m_0 c\}\;u(p) = 0.$$

Si on pose $E = p^0 c$, l'équation (2.46) va s'écrire sous la forme

$$\underbrace{\{c\vec{\alpha}.\vec{p} + \beta m_0 c^2\}}_{H_D}\ u(p) = E\ u(p) \tag{2.47}$$

ce qui montre qu'il s'agit bien d'un problème aux valeurs propres où on souhaite trouver les vecteurs propres $u(p)$ et les valeurs propres E de la matrice $H_D = c\vec{\alpha}.\vec{p} + \beta m_0 c^2$ [(1)].

2.1.4 La transformation de Foldy-Wouthuysen (FW) et le spectre d'énergie d'une particule libre

2.1.4-a. Le principe de la transformation FW

Désignons par M une matrice complexe $n \times n$ dont on souhaite déterminer les valeurs propres λ et les vecteurs propres v. On a donc, le problème aux valeurs propres

$$Mv = \lambda v. \tag{2.48}$$

Soit U une autre matrice complexe et U^{-1} sa matrice inverse, ce qui veut dire que

$$UU^{-1} = U^{-1}U = I_{n\times n}. \tag{2.49}$$

Avec ces conditions, on peut énoncer ces propriétés :

1. Si λ est une valeur propre de M avec le vecteur propre v, alors λ est une valeur propre de la matrice $N = UMU^{-1}$ avec le vecteur propre $w = Uv$.
   En effet,
   $$Mv = \lambda v \Longrightarrow UMI_{n\times n}\, v = U\lambda v \Longrightarrow UMU^{-1}\, Uv = \lambda\, Uv$$
   $$Nw = \lambda w. \tag{2.50}$$
2. Si λ est une valeur propre de N avec la vecteur propre w, alors λ est une valeur propre de la matrice M avec le vecteur propre $v = U^{-1}w$.
   En effet,
   $$Nw = \lambda w \Longrightarrow UMU^{-1}w = \lambda w \Longrightarrow U^{-1}UM\ U^{-1}w = U^{-1}\lambda w$$
   $$M\ U^{-1}w = \lambda\ U^{-1}w \Longrightarrow Mv = \lambda v. \tag{2.51}$$
   On en déduit que les matrices M et N ont les mêmes valeurs propres et leurs vecteurs propres sont liés par la relation $v = U^{-1}w \Longleftrightarrow w = Uv$.

1. : Il faut faire la différence entre l'opérateur $\hat{H}_D$ (avec circonflexe) défini auparavant et la matrice H_D (sans circonflexe).

Cette propriété peut être exploitée pour calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice M. Il suffit de trouver une matrice inversible U telle que la matrice $N = UMU^{-1}$ soit diagonale de la forme

$$N = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}. \tag{2.52}$$

Dans ce cas, les valeurs propres de N sont les $\lambda_i = a_i, i = 1, 2, ..., n$, et ses vecteurs propres ont les expressions

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \cdots \qquad w_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{2.53}$$

Cela étant fait, les valeurs propres de la matrice M sont aussi les $\lambda_i = a_i, i = 1, 2, ..., n$, tandis que ses vecteurs propres v_i s'obtiennent en utilisant la relation

$$v_i = U^{-1} w_i \qquad \Longrightarrow \qquad v_i = \begin{pmatrix} U^{-1}_{1i} \\ U^{-1}_{2i} \\ . \\ . \\ U^{-1}_{ni} \end{pmatrix} \tag{2.54}$$

où les U^{-1}_{ji} sont les éléments de la matrice inverse U^{-1}. Donc, nous avons diagonalisé une matrice dans le but de déterminer ses valeurs et ses vecteurs propres.

2.1.4-b. La transformation FW

La transformation de Foldy-Wouthuysen (FW) est une transformation unitaire conçue en 1950 pour les équations d'onde des particules fermioniques afin étudier leurs limites non relativistes [27]. Dans le cas de l'équation (2.47), elle consiste à transformer la matrice H_D en H_F telle que

$$H_F = U H_D U^{-1} \tag{2.55}$$

où U est une matrice complexe 4×4 de la forme

$$U = \cos\theta + \frac{\beta \vec{\alpha}.\vec{p}}{|\vec{p}|} \sin\theta = \cos\theta + \frac{\vec{\gamma}.\vec{p}}{|\vec{p}|} \sin\theta \tag{2.56}$$

$\theta \in \mathbb{R}$ et $|\vec{p}| = \sqrt{p^i p^i} = \sqrt{(p^1)^2 + (p^2)^2 + (p^3)^2}$ étant le module de l'impulsion $\vec{p}$.

Commençons par vérifier que U^{-1} est donnée par

$$U^{-1} = \cos\theta - \frac{\beta \vec{\alpha}.\vec{p}}{|\vec{p}|} \sin\theta. \tag{2.57}$$

En effet,

$$UU^{-1} = \cos^2\theta - \frac{\beta\vec{\alpha}.\vec{p}\;\beta\vec{\alpha}.\vec{p}}{|\vec{p}|^2}\sin^2\theta.$$

Calculons le produit matriciel $\beta\vec{\alpha}\vec{p}\beta\vec{\alpha}\vec{p}$ séparément :

$$\begin{aligned}\beta\vec{\alpha}.\vec{p}\;\beta\vec{\alpha}.\vec{p} = \quad & \beta\alpha^i p^i\beta\alpha^j p^j = -\beta^2\alpha^i\alpha^j p^i p^j = -\tfrac{1}{2}(\alpha^i\alpha^j + \alpha^i\alpha^j)p^i p^j \\ & -\tfrac{1}{2}(\alpha^i\alpha^j p^i p^j + \alpha^i\alpha^j p^i p^j) = -\tfrac{1}{2}(\alpha^i\alpha^j p^i p^j + \alpha^j\alpha^i p^j p^i) \\ & -\tfrac{1}{2}(\alpha^i\alpha^j + \alpha^j\alpha^i)p^j p^i = -\delta^{ij}p^j p^i = -p^i p^i\end{aligned}$$

d'où

$$\beta\vec{\alpha}.\vec{p}\;\beta\vec{\alpha}.\vec{p} = -|\vec{p}|^2. \tag{2.58}$$

Il est clair maintenant que

$$UU^{-1} = \cos^2\theta - \frac{-|\vec{p}|^2}{|\vec{p}|^2}\sin^2\theta = 1. \tag{2.59}$$

On vérifie d'une manière analogue que $U^{-1}U = 1$.

Notre transformation est unitaire comme le montre le calcul ci-dessous :

$$\begin{aligned}U^\dagger &= \left(\cos\theta + \tfrac{\beta\vec{\alpha}.\vec{p}}{|\vec{p}|}\sin\theta\right)^\dagger = \cos\theta + \tfrac{(\beta\alpha^i p^i)^\dagger}{|\vec{p}|}\sin\theta \\ &= \cos\theta + \tfrac{(\alpha^i)^\dagger\beta^\dagger p^i}{|\vec{p}|}\sin\theta = \cos\theta + \tfrac{\alpha^i\beta p^i}{|\vec{p}|}\sin\theta \\ &= \cos\theta - \tfrac{\beta\alpha^i p^i}{|\vec{p}|}\sin\theta = \cos\theta - \tfrac{\beta\vec{\alpha}.\vec{p}}{|\vec{p}|}\sin\theta\end{aligned}$$

donc

$$U^\dagger = U^{-1}. \tag{2.60}$$

Au lieu de calculer directement $H_F = UH_DU^{-1}$, il est préférable de démontrer d'abord que $H_DU^{-1} = UH_D$, ce qui va nous permettre de simplifier la manipulation des différents termes. En effet,

$$\begin{aligned}H_DU^{-1} &= c\vec{\alpha}.\vec{p}\cos\theta + \beta m_0c^2\cos\theta - c\vec{\alpha}.\vec{p}\tfrac{\beta\vec{\alpha}\vec{p}}{|\vec{p}|}\sin\theta - \beta m_0c^2\tfrac{\beta\vec{\alpha}.\vec{p}}{|\vec{p}|}\sin\theta \\ &= \cos\theta\; c\vec{\alpha}.\vec{p} + \cos\theta\;\beta m_0c^2 + \beta\tfrac{\vec{\alpha}.\vec{p}}{|\vec{p}|}\sin\theta\; c\vec{\alpha}.\vec{p} + \beta\tfrac{\vec{\alpha}.\vec{p}}{|\vec{p}|}\sin\theta\;\beta m_0c^2 \\ &= \left(\cos\theta + \beta\tfrac{\vec{\alpha}.\vec{p}}{|\vec{p}|}\sin\theta\right)c\vec{\alpha}\vec{p} + \left(\cos\theta + \beta\tfrac{\vec{\alpha}.\vec{p}}{|\vec{p}|}\sin\theta\right)\beta m_0c^2 \\ &= \left(\cos\theta + \tfrac{\beta\vec{\alpha}.\vec{p}}{|\vec{p}|}\sin\theta\right)(c\vec{\alpha}\vec{p} + \beta m_0c^2)\end{aligned}$$

et effectivement, on a

$$H_DU^{-1} = UH_D \qquad \Longrightarrow \qquad H_F = UH_DU^{-1} = U^2H_D. \tag{2.61}$$

L'étape suivante est d'expliciter la matrice U^2 à l'aide de (2.58) :

$$\begin{aligned}U^2 &= \left(\cos\theta + \tfrac{\beta\vec{\alpha}.\vec{p}}{|\vec{p}|}\sin\theta\right)^2 \\ &= \cos^2\theta + 2\tfrac{\beta\vec{\alpha}.\vec{p}}{|\vec{p}|}\sin\theta\cos\theta + \tfrac{\beta\vec{\alpha}.\vec{p}}{|\vec{p}|}\tfrac{\beta\vec{\alpha}.\vec{p}}{|\vec{p}|}\sin^2\theta \\ &= \cos^2\theta - \sin^2\theta + \tfrac{\beta\vec{\alpha}.\vec{p}}{|\vec{p}|}2\sin\theta\cos\theta\end{aligned}$$

d'où

$$U^2 = \cos 2\theta + \frac{\beta\vec{\alpha}.\vec{p}}{|\vec{p}|}\sin 2\theta. \tag{2.62}$$

Maintenant, il est de temps de passer au calcul de la matrice H_F :

$$\begin{aligned} H_F &= UH_DU^{-1} = U^2H_D = \left(\cos 2\theta + \tfrac{\beta\vec{\alpha}.\vec{p}}{|\vec{p}|}\sin 2\theta\right)(c\vec{\alpha}.\vec{p} + \beta m_0c^2) \\ &= \cos 2\theta\ c\vec{\alpha}.\vec{p} + \tfrac{\beta\vec{\alpha}.\vec{p}}{|\vec{p}|}\sin 2\theta\ \beta m_0c^2 + \cos 2\theta\ \beta m_0c^2 + \tfrac{\beta\vec{\alpha}.\vec{p}}{|\vec{p}|}\sin 2\theta\ c\vec{\alpha}.\vec{p} \\ &= c\vec{\alpha}.\vec{p}\ \cos 2\theta - \beta^2 m_0c^2\tfrac{\vec{\alpha}.\vec{p}}{|\vec{p}|}\sin 2\theta + \beta m_0c^2\cos 2\theta - c\ \tfrac{\vec{\alpha}.\vec{p}\beta}{|\vec{p}|}\vec{\alpha}.\vec{p}\ \sin 2\theta \\ &= c\vec{\alpha}.\vec{p}\cos 2\theta - m_0c^2\tfrac{\vec{\alpha}.\vec{p}}{|\vec{p}|}\sin 2\theta + \beta m_0c^2\cos 2\theta - c\ \beta^2\tfrac{\vec{\alpha}.\vec{p}\beta}{|\vec{p}|}\vec{\alpha}.\vec{p}\ \sin 2\theta \\ &= c\vec{\alpha}.\vec{p}\cos 2\theta - m_0c^2\tfrac{\vec{\alpha}.\vec{p}}{|\vec{p}|}\sin 2\theta + \beta m_0c^2\cos 2\theta + c\ \beta\tfrac{|\vec{p}|^2}{|\vec{p}|}\ \sin 2\theta \end{aligned} \tag{2.63}$$

et finalement, le résultat est

$$H_F = c\vec{\alpha}.\vec{p}\left(\cos 2\theta - \frac{m_0c}{|\vec{p}|}\sin 2\theta\right) + \beta m_0c^2\left(\cos 2\theta + \frac{|\vec{p}|}{m_0c}\sin 2\theta\right). \tag{2.64}$$

Le premier terme de l'expression de la matrice H_F n'est pas diagonal, contrairement au deuxième. C'est pour cette raison qu'on va choisir une valeur de θ notée θ_0 de sorte à l'annuler ce qui va nous permettre d'obtenir une matrice diagonale. Donc θ_0 doit découler de la condition

$$\cos 2\theta_0 - \frac{m_0c}{|\vec{p}|}\sin 2\theta_0 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \tan 2\theta_0 = \frac{|\vec{p}|}{m_0c}. \tag{2.65}$$

Il est utile aussi d'exprimer $\sin 2\theta_0$ et $\cos 2\theta_0$ en fonction de $|\vec{p}|$ comme suit :

$$\sin 2\theta_0 = \frac{\tan 2\theta_0}{\sqrt{1+\tan^2 2\theta_0}} = \frac{|\vec{p}|c}{\sqrt{|\vec{p}|^2c^2 + m_0^2c^4}} \tag{2.66}$$

$$\cos 2\theta_0 = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 2\theta_0}} = \frac{m_0c^2}{\sqrt{|\vec{p}|^2c^2 + m_0^2c^4}}. \tag{2.67}$$

Remplaçons dans l'expression (2.64) pour obtenir H_F en fonction de $|\vec{p}|$:

$$H_F = \beta\left(\frac{m_0^2c^4}{\sqrt{|\vec{p}|^2c^2 + m_0^2c^4}} + \frac{|\vec{p}|^2c^2}{\sqrt{|\vec{p}|^2c^2 + m_0^2c^4}}\right)$$

d'où la forme réduite

$$H_F = \beta\ \sqrt{|\vec{p}|^2c^2 + m_0^2c^4}. \tag{2.68}$$

Explicitement, la matrice H_F s'écrit comme étant

$$H_F = \begin{pmatrix} \sqrt{|\vec{p}|^2c^2 + m_0^2c^4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{|\vec{p}|^2c^2 + m_0^2c^4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{|\vec{p}|^2c^2 + m_0^2c^4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{|\vec{p}|^2c^2 + m_0^2c^4} \end{pmatrix}. \tag{2.69}$$

Quand on remplace θ par la valeur θ_0 dans l'expression (2.56) de U, la matrice résultante sera

$$U_0 = \cos\theta_0 + \frac{\beta\vec{\alpha}.\vec{p}}{|\vec{p}|}\sin\theta_0. \tag{2.70}$$

Mais

$$\cos\theta_0 = \sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta_0)} = \sqrt{\frac{\sqrt{|\vec{p}|^2c^2+m_0^2c^4}+m_0^2c^4}{2\sqrt{|\vec{p}|^2c^2+m_0^2c^4}}}$$

d'où

$$\cos\theta_0 = \frac{\sqrt{|\vec{p}|^2c^2+m_0^2c^4}+m_0^2c^4}{(2\sqrt{|\vec{p}|^2c^2+m_0^2c^4}\,(\sqrt{|\vec{p}|^2c^2+m_0^2c^4}+m_0^2c^4))^{\frac{1}{2}}}, \tag{2.71}$$

et

$$\sin\theta_0 = \sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)} = \sqrt{\frac{\sqrt{|\vec{p}|^2c^2+m_0^2c^4}-m_0c^2}{2\sqrt{|\vec{p}|^2c^2+m_0^2c^4}}}$$

d'où

$$\sin\theta_0 = \frac{|\vec{p}|c}{(2\sqrt{|\vec{p}|^2c^2+m_0^2c^4}\,(\sqrt{|\vec{p}|^2c^2+m_0^2c^4}+m_0^2c^4))^{\frac{1}{2}}}, \tag{2.72}$$

donc

$$U_0 = \frac{\sqrt{|\vec{p}|^2c^2+m_0^2c^4}+m_0^2c^4+c\,\beta\vec{\alpha}.\vec{p}}{(2\sqrt{|\vec{p}|^2c^2+m_0^2c^4}\,(\sqrt{|\vec{p}|^2c^2+m_0^2c^4}+m_0^2c^4))^{\frac{1}{2}}}. \tag{2.73}$$

Après ce long calcul, il est temps de songer à interpréter nos résultats du point de vue physique. On a commencé par rechercher une onde plane solution de l'équation de Dirac libre dont la forme est exprimée par l'équation (2.44). On a abouti au problème aux valeurs propres (2.47), ensuite on a fait appel à la transformation de Foldy-Wouthuysen afin de le résoudre. Regardons maintenant l'expression (2.69) de la matrice H_F qui montre qu'elle est bien diagonale, cela implique que ses valeurs propres sont $E = \pm\sqrt{|\vec{p}|^2c^2+m_0^2c^4}$ qui sont aussi les valeurs propres de la matrice H_D du problème aux valeur propres (2.47). Cette forme de l'énergie nous rappelle la relation de dispersion énergie-impulsion $E = \sqrt{|\vec{p}|^2c^2+m_0^2c^4}$ d'une particule relativiste, donc on peut interpréter les choses comme suit : la fonction d'onde (2.44) peut décrire une particule libre d'impulsion $\vec{p}$, d'énergie $E_1 = \sqrt{|\vec{p}|^2c^2+m_0^2c^4}$ et de spin 1/2, ou bien, son antiparticule ayant le même spin et l'énergie $E_2 = -\sqrt{|\vec{p}|^2c^2+m_0^2c^4}$.

2.2 L'équation de Dirac déformée dans l'espace des impulsions

Après avoir rappelé quelque propriétés de l'équation de Dirac ordinaire valable dans le cadre de la relativité restreinte, il est naturel de chercher une équation de Dirac déformée qui va jouer un rôle similaire en relativité spéciale déformée. Plusieurs articles de la physique théorique traitant ce sujet sont publiés, dont on peut citer les travaux d'Alain Bérard, Hervé

Mohrbach et Subir Ghosh avec leurs collaborateurs [32], ainsi que les travaux d'autres physiciens [39, 49, 56, 66, 70, 74, 75, 78].

2.2.1 L'équation de Dirac déformée dans l'espace des impulsions

Soit une κ-particule libre de masse au repos m_o ayant l'énergie $E = c\,p_0$ et l'impulsion $\vec{p} = (p^1, p^2, p^3)$. Pour écrire l'équation de Dirac déformée qui va la décrire dans le cadre de la relativité spéciale déformée, on va utiliser les variables canoniques (X^μ, P^μ) définies au chapitre précédent par les relations (1.174) et (1.175). C'est-à-dire, les relations

$$P^\mu = \frac{p^{\,\mu}}{1 - \lambda c p_{\,0}} \qquad\qquad X^\mu = x^\mu\,(1 - \lambda c p_0)$$

où $\lambda = \frac{1}{E_p} = \frac{1}{c\,\kappa}$, et E_p est l'énergie de Planck. En variables canoniques, l'équation de Dirac déformée relative à une κ-particule libre, doit prendre la même forme que l'équation (2.46) qui décrit une particule relativiste libre dans l'espace des impulsions (moments conjugués). Autrement dit, notre équation sera

$$(\gamma^\mu P_\mu - m_o c)u(P) = 0 \tag{2.74}$$

où les γ^μ sont les matrices de Dirac et $u(P)$ est un spineur à quatre composantes. Revenons maintenant aux coordonnées (x^μ, p^μ) afin d'avoir la forme

$$\left(\gamma^\mu \frac{p_\mu}{1 - \lambda c p_{\,0}} - m_o c\right)\, u(p) = 0. \tag{2.75}$$

Cette équation est l'équation de Dirac déformée décrivant une κ-particule libre dans l'espace des impulsions, écrite pour la première fois par A. Bérard et ses collaborateurs [32]. On remarque que quand λ est très petit (ce qui veut dire que $E_p \longrightarrow \infty$), cette équation tend vers l'équation de Dirac (2.46) de la relativité restreinte. Il est aussi utile de voir que cette équation peut se mettre sous la forme

$$\left(\gamma^\mu p_{\,\mu} - m_o c\,(1 - \lambda c p_{\,0})\right)\, u(p) = 0. \tag{2.76}$$

En multipliant à gauche par γ^0, et en utilisant le fait que $\gamma^0 = \beta$ et $\gamma^0\gamma^i = \alpha^i$, on aboutit à l'expression

$$\left(E - c\vec{\alpha}.\vec{p} - \beta m_o c^2 \left(1 - \frac{E}{E_p}\right)\right)\, u(p) = 0 \tag{2.77}$$

d'où la relation

$$\left(c\,\vec{\alpha}.\vec{p} + \beta m_o c^2\right)\, u(p) = \left(1 + \frac{\beta m_o c^2}{E_p}\right)\, E u(p). \tag{2.78}$$

Dans le but d'écrire cette équation de la forme $H_D(\vec{p})\,u(p) = E\,u(p)$ où $H_D(\vec{p})$ sera la matrice hamiltonienne de Dirac déformée, multipliant l'équation précédente à gauche par la matrice $(1 + \frac{\beta m_o c^2}{E_p})^{-1} = (1 + \lambda m_o c^2 \beta)^{-1}$. D'abord, un petit calcul montre que

$$(1 + \lambda m_o c^2 \beta)^{-1} = \frac{1 - \lambda \beta m_o c^2}{1 - \lambda^2 m_o^2 c^4}. \tag{2.79}$$

L'équation (2.78) devient alors

$$\frac{1-\beta\lambda m_o c^2}{1-\lambda^2 m_o^2 c^4}(c\,\vec{\alpha}.\vec{p}+\beta m_o c^2)\;u(p)=E\;u(p) \tag{2.80}$$

puis après développement,

$$\left(\frac{-\lambda m_o^2 c^4}{1-\lambda^2 m_o^2 c^4}+\frac{m_o}{1-\lambda^2 m_o^2 c^4}\,c^2\beta+\frac{1-\lambda m_o c^2\beta}{1-\lambda^2 m_o^2 c^4}\,c\vec{\alpha}.\vec{p}\right)u(p)=E\;u(p). \tag{2.81}$$

Posons $A=\frac{-\lambda m_o^2 c^4}{1-\lambda^2 m_o^2 c^4}$, $B=\frac{m_o}{1-\lambda^2 m_o^2 c^4}$ et $C=\frac{1-\lambda m_o c^2\beta}{1-\lambda^2 m_o^2 c^4}$ [2]. L'équation précédente va se simplifier sous la forme

$$(A+B\,c^2\beta+C\,c\vec{\alpha}.\vec{p})\;u(p)=E\;u(p) \tag{2.82}$$

et on en déduit que la matrice hamiltonienne de Dirac déformée est

$$H_D=A+B\,c^2\beta+C\,c\vec{\alpha}.\vec{p}. \tag{2.83}$$

Quand E_p tend vers l'infini (donc λ tend vers zéro), cette matrice tend vers la matrice hamiltonienne de Dirac ordinaire (2.47). En plus, il faut mentionner que la matrice H_D n'est pas hermitienne. En effet,

$$\begin{aligned}H_D^{\dagger}&=A^{\dagger}+B\,c^2\beta^{\dagger}+\vec{\alpha}^{\dagger}.C^{\dagger}\,c\vec{p}=A+B\,c^2\beta+\vec{\alpha}.C\,c\vec{p}\\&=A+B\,c^2\beta+\vec{\alpha}.\tfrac{1-\lambda m_o c^2\beta}{1-\lambda^2 m_o^2 c^4}\,c\vec{p}A+B\,c^2\beta+\tfrac{1+\lambda m_o c^2\beta}{1-\lambda^2 m_o^2 c^4}\,c\vec{\alpha}.\vec{p}\neq H_D.\end{aligned}$$

Avant de chercher une transformation de Foldy-Wouthuysen similaire à celle de la partie précédente pour le hamiltonien H_D, nous allons lui faire subir une première transformation de sorte à obtenir un nouveau hamiltonien hermitien H_B qui va résoudre le problème de son non hermicité.

2.2.2 La première transformation du H_D

Dans ce paragraphe, nous allons essayer de détailler la première transformation appliquée à la matrice H_D parue pour la première fois dans l'article [32]. Premièrement, remarquons que d'après la relation (2.79), on peut tirer le résultat suivant :

$$C^{-1}=\left(\frac{1-\lambda m_o c^2\beta}{1-\lambda^2 m_o^2 c^4}\right)^{-1}=1+\lambda m_o c^2\beta. \tag{2.84}$$

Cherchons maintenant une matrice D telle que $D^2=C^{-1}$. Puisque $C^{-1}=1+\lambda m_o c^2\beta$, cherchons D de la forme $D=a+b\beta$. En effet,

$$D^2=a^2+b^2+2ab\beta=1+\lambda m_o c^2\beta$$

2. : A et B sont des nombres réels alors que C est une matrice carrée diagonale 4×4.

puis par identification, on aura

$$\left\{ \begin{array}{l} a^2+b^2=1 \\ 2ab=\lambda m_o c^2 \end{array} \right. \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} a=\sqrt{\frac{1}{2}(1+\sqrt{1-\lambda^2 m_o^2 c^4})} \\ b=\sqrt{\frac{1}{2}\frac{\lambda^2 m_o^2 c^4}{(1+\sqrt{1-\lambda^2 m_o^2 c^4})}}. \end{array} \right. \tag{2.85}$$

Après avoir trouver l'expression de la matrice D, passons à la recherche de la matrice D^{-1}. Pour cela, remarquons que

$$DC = D\,(D^{-1}D^{-1}) = D^{-1} \tag{2.86}$$

d'où

$$D^{-1} = D\,C = (a+b\beta)\left(\frac{1}{1-\lambda^2 m_o^2 c^4} - \frac{\lambda m_o c^2}{1-\lambda^2 m_o^2 c^4}\beta\right)$$

$$D^{-1} = \frac{a-b\lambda m_o c^2}{1-\lambda^2 m_o^2 c^4} + \frac{b-a\lambda m_o c^2}{1-\lambda^2 m_o^2 c^4}\beta = r+s\beta \tag{2.87}$$

où $r=\frac{a-b\lambda m_o c^2}{1-\lambda^2 m_o^2 c^4}$ et $s=\frac{b-a\lambda m_o c^2}{1-\lambda^2 m_o^2 c^4}$, tandis que a et b sont donnés par (2.85).

A ce stade, on peut construire la matrice H_B transformée de la matrice H_D à l'aide de la matrice D et son inverse. Autrement dit,

$$H_B = DH_DD^{-1} = D(A+B\,c^2\beta + C\,c\vec{\alpha}.\vec{p})D^{-1} = A + Bc^2\beta + c\,DC\alpha^i p^i D^{-1}. \tag{2.88}$$

Le résultat précédent est dû au fait que les matrices D, D^{-1} et β sont diagonales, donc elles commutent entre elles. En plus, A et B sont des réels multipliés par la matrice identité $I_{4\times4}$ qui commute avec toutes les matrices 4×4. Pour continuer, utilisons les relations (2.86) et (2.87), d'où il en résulte que

$$\begin{aligned} H_B &= A + B\beta + (r+s\beta)\alpha^i p^i (r+s\beta) \\ &= A + B\,c^2\beta + c\,(r+s\beta)(r-s\beta)\vec{\alpha}\vec{p} \end{aligned}$$

$$H_B = A + B\,c^2\beta + c\,(r^2-s^2)\vec{\alpha}\vec{p}. \tag{2.89}$$

Calculons maintenant (r^2-s^2) séparément à partir de la relation (2.87) :

$$r^2 - s^2 = \frac{a^2-b^2}{1-\lambda^2 m_o^2 c^4}. \tag{2.90}$$

D'un autre coté, les relations (2.85) nous permettent de voir que

$$a^2-b^2 = \frac{(1-\lambda^2 m_o^2 c^4) + \sqrt{1-\lambda^2 m_o^2 c^4}}{(1+\sqrt{1-\lambda^2 m_o^2 c^4})}$$

$$a^2 - b^2 = \sqrt{1-\lambda^2 m_o^2 c^4}. \tag{2.91}$$

Remplaçons ce résultat dans l'équation (2.90) pour aboutir à la relation

$$r^2 - s^2 = (1 - \lambda^2 m_o^2 c^4)^{-\frac{1}{2}}. \tag{2.92}$$

Enfin, l'expression finale de H_B s'obtient en injectant ce résultat dans l'expression (2.89) :

$$H_B = A + B\, c^2\beta - (1 - \lambda^2 m_o^2 c^4)^{-\frac{1}{2}}\, c\vec{\alpha}.\vec{p}. \tag{2.93}$$

A première vue, l'expression de ce hamiltonien H_B apparaît plus simple et plus élégante que celle de H_D de l'équation (2.81). En plus, ce hamiltonien H_B tend aussi vers l'hamiltonien de Dirac (2.47) de la relativité restreinte quand λ tend vers zéro ($E_p \longrightarrow \infty$). Contrairement au hamiltonien H_D, ce nouveau hamiltonien H_B est hermitien. Donc, on peut être sûr que ses valeurs propres sont réelles et peuvent être observées dans des experiences. Il est de même pour H_D, car ces deux hamiltoniens possèdent les mêmes valeurs propres (voir le paragraphe *2.1.4*).

2.2.3 La transformation de Foldy-Wouthuysen déformée

Le but de ce paragraphe est d'appliquer au hamiltonien H_B (matrice hamiltonienne) une transformation analogue à la transformation de Foldy-Wouthuysen étudiée dans la première partie de ce chapitre. D'après la relation (2.93), le hamiltonien H_B peut se mettre sous la forme

$$H_B = A + \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda^2 m_o^2 c^4}} \left(\sqrt{1 - \lambda^2 m_o^2 c^4}\, B\, c^2\beta - c\, \vec{\alpha}.\vec{p} \right). \tag{2.94}$$

Posons alors

$$M = \sqrt{1 - \lambda^2 m_o^2 c^4}\, B \quad \Longrightarrow \quad M = \frac{m_o}{\sqrt{1 - \lambda^2 m_o^2 c^4}} \tag{2.95}$$

et cherchons une matrice U, ayant la même forme que celle utilisée auparavant, qui va nous permettre de diagonaliser le hamiltonien H_B. C'est-à-dire, une transformation de la forme

$$U = \cos\theta + \frac{\beta\vec{\alpha}.\vec{p}}{|\vec{p}|} \sin\theta. \tag{2.96}$$

Le nouveau hamiltonien H_F sera défini par la relation

$$H_F = U H_B U^{-1} = A + \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda^2 m_o^2 c^4}}\, U(Mc^2\beta - c\vec{\alpha}.\vec{p})U^{-1}. \tag{2.97}$$

Calculons d'abord $U(Mc^2\beta - c\vec{\alpha}.\vec{p})U^{-1}$ séparément. Afin d'éviter de refaire les mêmes calculs déjà faits, remarquons que $Mc^2\beta - c\vec{\alpha}.\vec{p}$ a la même forme que le hamiltonien du Dirac de la relativité restreinte $m_o c^2\beta - c\vec{\alpha}.\vec{p}$ auquel on a appliqué une transformation de FW dans la première partie de ce chapitre. La seule différence est que dans ce cas on a M à la place de m_o mais les deux étant des réels, ce qui leur donne la même nature mathématique.

On conclut qu'il suffit de remplacer m_o par M dans les résultats du paragraphe (*2.1.4-b*) sans refaire tous les calculs. Autrement dit, à partir de la relation (2.61) et du calcul qui la précède, on aura directement

$$U(Mc^2\beta - c\vec{\alpha}.\vec{p})U^{-1} = U^2(Mc^2\beta - c\vec{\alpha}.\vec{p}). \tag{2.98}$$

En utilisant la relation (2.64) et le calcul qui la précède aussi, on aboutit au résultat

$$U^{-1}(Mc^2\beta - c\vec{\alpha}.\vec{p})U = c\vec{\alpha}.\vec{p}\left(\cos 2\theta - \frac{Mc}{|\vec{p}|}\sin 2\theta\right) + \beta Mc^2\left(\cos 2\theta + \frac{|\vec{p}|}{Mc}\sin 2\theta\right). \tag{2.99}$$

Remplaçons dans l'équation (2.97) pour avoir enfin l'expression du H_F sous la forme

$$H_F = A + \frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2 m_o^2 c^4}}\left(c\vec{\alpha}.\vec{p}\left(\cos 2\theta - \frac{Mc}{|\vec{p}|}\sin 2\theta\right) + \beta Mc^2\left(\cos 2\theta + \frac{|\vec{p}|}{Mc}\sin 2\theta\right)\right). \tag{2.100}$$

Pour que le hamiltonien H_F soit diagonal, il faut éliminer le terme où figure le produit $\vec{\alpha}.\vec{p}$, et pour ce faire, il suffit de choisir une valeur $\theta = \tilde{\theta}$ vérifiant la condition

$$\cos 2\tilde{\theta} - \frac{Mc}{|\vec{p}|}\sin 2\widetilde{\theta} = 0 \implies \tan 2\widetilde{\theta} = \frac{|\vec{p}|}{Mc} \implies \tan 2\widetilde{\theta} = \frac{|\vec{p}|\sqrt{1-\lambda^2 m_o^2 c^4}}{m_o c}. \tag{2.101}$$

On en déduit facilement que

$$\cos 2\tilde{\theta} = \frac{1}{\sqrt{\tan^2 2\widetilde{\theta} + 1}} = \frac{m_o c}{\sqrt{|\vec{p}|^2(1-\lambda^2 m_o^2 c^4) + m_o^2 c^2}} \tag{2.102}$$

et que

$$\sin 2\tilde{\theta} = \sqrt{1 - \cos^2 2\widetilde{\theta}} = \frac{|\vec{p}|\sqrt{1-\lambda^2 m_o^2 c^4}}{\sqrt{|\vec{p}|^2(1-\lambda^2 m_o^2 c^4) + m_o^2 c^2}}. \tag{2.103}$$

Avec cette valeur $\tilde{\theta}$, le hamiltonien H_F se réduit à la forme diagonale

$$H_F = A + \frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2 m_o^2 c^4}}\left(\beta Mc^2\left(\cos 2\widetilde{\theta} + \frac{|\vec{p}|}{Mc}\sin 2\widetilde{\theta}\right)\right).$$

Explicitement,

$$H_F = \frac{-\lambda m_o^2 c^4}{1-\lambda^2 m_o^2 c^4} + \frac{\beta m_o c^2}{1-\lambda^2 m_o^2 c^4}\left(\cos 2\widetilde{\theta} + \frac{|\vec{p}|\sqrt{1-\lambda^2 m_o^2 c^4}}{m_o c}\sin 2\widetilde{\theta}\right).$$

Compte tenu des relation (2.102) et (2.103), l'expression finale de H_F est

$$H_F = \frac{-\lambda m_o^2 c^4}{1-\lambda^2 m_o^2 c^4} + \frac{\beta c}{1-\lambda^2 m_o^2 c^4}\sqrt{|\vec{p}|^2(1-\lambda^2 m_o^2 c^4) + m_o^2 c^2}. \tag{2.104}$$

Ce hamiltonien est diagonal et hermitien, en plus, il tend vers le hamiltonien de l'équation (2.68) quand $\lambda \longrightarrow 0$.

Avant de terminer avec la transformation FW, exprimons la matrice de transformation $\tilde{U}$ en fonction de l'impulsion $\vec{p}$. En utilisant la relation (2.102), on aura

$$\cos\tilde{\theta} = \sqrt{\frac{1}{2}(1+cos2\tilde{\theta})} = \sqrt{\frac{1}{2}\frac{\sqrt{|\vec{p}|^2(1-\lambda^2 m_o^2c^4)+m_o^2c^2}+m_oc}{\sqrt{|\vec{p}|^2(1-\lambda^2 m_o^2c^4)+m_o^2c^2}}}$$

d'où

$$\cos\tilde{\theta} = \frac{\sqrt{|\vec{p}|^2(1-\lambda^2 m_o^2c^4)+m_o^2c^2}+m_oc}{(2\sqrt{|\vec{p}|^2(1-\lambda^2 m_o^2c^4)+m_o^2c^2}(\sqrt{|\vec{p}|^2(1-\lambda^2 m_o^2c^4)+m_o^2c^2}+m_oc))^{\frac{1}{2}}} \tag{2.105}$$

et

$$\sin\tilde{\theta} = \sqrt{\frac{1}{2}(1-cos2\tilde{\theta})} = \sqrt{\frac{1}{2}\frac{\sqrt{|\vec{p}|^2(1-\lambda^2 m_o^2c^4)+m_o^2c^2}-m_oc}{\sqrt{|\vec{p}|^2(1-\lambda^2 m_o^2c^4)+m_o^2c^2}}}$$

d'où

$$\sin\tilde{\theta} = \frac{|\vec{p}|\sqrt{(1-\lambda^2 m_o^2c^4)}}{(2\sqrt{|\vec{p}|^2(1-\lambda^2 m_o^2c^4)+m_o^2c^2}(\sqrt{|\vec{p}|^2(1-\lambda^2 m_o^2c^4)+m_o^2c^2}+m_oc))^{\frac{1}{2}}} \tag{2.106}$$

Finalement, en remplaçant dans (2.96), on aboutit à cette expression de $\widetilde{U}$

$$\widetilde{U} = \frac{\sqrt{|\vec{p}|^2(1-\lambda^2 m_o^2c^4)+m_o^2c^2}+m_oc+\sqrt{(1-\lambda^2 m_o^2c^4)}\beta\vec{\alpha}.\vec{p}}{(2\sqrt{|\vec{p}|^2(1-\lambda^2 m_o^2c^4)+m_o^2c^2}(\sqrt{|\vec{p}|^2(1-\lambda^2 m_o^2c^4)+m_o^2c^2}+m_oc))^{\frac{1}{2}}}. \tag{2.107}$$

Il faut remarquer que $\widetilde{U}$ tend vers U_0 donnée par l'expression (2.73) quand $\lambda \longrightarrow 0$.

2.2.4 Interprétation des résultats

Le hamiltonien de Dirac déformé H_D dont l'expression est donnée par (2.83) a les mêmes valeurs propres que les hamiltoniens H_B et H_F dont les expressions sont données respectivement par les équations (2.93) et (2.104), parce que ces deux derniers sont obtenus par les transformations suivantes : $H_B = DH_DD^{-1}$ et $H_F = UH_BU^{-1}$ (*voir le paragraphe 2.1.4-a de ce chapitre*). Si on regarde bien le hamiltonien H_F, on vera qu'il est diagonal, car la matrice β est diagonale. En effet,

$$H_F = \begin{pmatrix} \frac{-\lambda m_o^2c^4+c\sqrt{|\vec{p}|^2(1-\lambda^2 m_o^2c^4)+m_o^2c^2}}{1-\lambda^2 m_o^2c^4}\, I_{2\times2} & 0 \\ 0 & \frac{-\lambda m_o^2c^4-c\sqrt{|\vec{p}|^2(1-\lambda^2 m_o^2c^4)+m_o^2c^2}}{1-\lambda^2 m_o^2c^4}\, I_{2\times2} \end{pmatrix} \tag{2.108}$$

où $I_{2\times2}$ est la matrice identité 2×2 et $\lambda = 1/E_p$. On en déduit directement que les deux valeurs propres de H_F sont :

$$E_1 = \frac{-\lambda m_o^2c^4+c\sqrt{|\vec{p}|^2(1-\lambda^2 m_o^2c^4)+m_o^2c^2}}{1-\lambda^2 m_o^2c^4} \tag{2.109}$$

$$E_2 = \frac{-\lambda m_o^2 c^4 - c\sqrt{|\vec{p}|^2(1-\lambda^2 m_o^2 c^4) + m_o^2 c^2}}{1-\lambda^2 m_o^2 c^4} \tag{2.110}$$

sachant que chacune d'entre elles est dégénérée deux fois. Elles sont aussi les valeurs propres du hamiltonien de Dirac déformé H_D. Ce résultat a été obtenu par A. Bérard et ses collaborateurs [32]. Donc, dans le cadre la relativité spéciale déformée, l'équation de Dirac déformée libre nous montre que l'impulsion $\vec{p}$ d'une κ-particule libre et son énergie E sont reliées par l'une des deux relations ci-dessous.

$$E = \frac{-\frac{m_o^2 c^4}{E_p} \pm c\sqrt{|\vec{p}|^2(1-\frac{m_o^2 c^4}{E_p^2}) + m_o^2 c^2}}{1-\frac{m_o^2 c^4}{E_p^2}}. \tag{2.111}$$

A première vue, on remarque que $E \longrightarrow \pm c\sqrt{|\vec{p}|^2 + m_o^2 c^2}$ quand $E_p \longrightarrow \infty$. Donc, pour des énergies petites devant l'énergie de Planck E_p, les résultats de l'équation de Dirac déformée tendent vers ceux de l'équation ordinaire. La deuxième remarque importante qu'on peut ajouter est le fait que cette relation énergie-impulsion n'est rien d'autre que la relation obtenue au chapitre précédent exprimée par la relation (1.140). Cela veut dire que l'expression (2.111) de l'énergie satisfait la relation de dispersion de Magueijo-Smolin $E^2 - |\vec{p}|^2 c^2 = m_o^2 c^4 \,(1-\frac{E}{E_p})^2$. Pour conclure, on peut dire que l'équation de Dirac déformée décrit à la fois une particule libre du spin 1/2 avec une énergie $E_1 = \frac{-\frac{m_o^2 c^4}{E_p} + c\sqrt{|\vec{p}|^2(1-\frac{m_o^2 c^4}{E_p^2}) + m_o^2 c^2}}{1-\frac{m_o^2 c^4}{E_p^2}}$ et son antiparticule ayant aussi un spin 1/2 et une énergie $E_2 = \frac{-\frac{m_o^2 c^4}{E_p} - c\sqrt{|\vec{p}|^2(1-\frac{m_o^2 c^4}{E_p^2}) + m_o^2 c^2}}{1-\frac{m_o^2 c^4}{E_p^2}}$, car cette équation a deux valeurs propres dont chacune est dégénérée deux fois, donc elle possède quatre vecteurs propres correspondant aux quatre projections possibles du spin : $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$ pour la particule, et $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$ pour l'antiparticule.

2.3 L'équation de Dirac déformée dans l'espace des positions

2.3.1 Principe de correspondance dans le κ-espace de Minkowski

Afin d'écrire une équation de Dirac déformée dans l'espace des positions, il faut déterminer un principe de correspondance à partir du κ-espace des phases de Minkowski [46, 47]. Classiquement, nous avons les crochets déformés suivants :

$$\begin{cases} \{x^\mu, x^\nu\} = \lambda\,(x^\mu \delta_0^\nu - x^\nu \delta_0^\mu) \\ \{x^\mu, p^\nu\} = -\eta^{\mu\nu} + \lambda p^\nu \delta_0^\mu \\ \{p^\mu, p^\nu\} = 0 \end{cases} \tag{2.112}$$

où $\lambda = \frac{1}{\kappa} = \frac{c}{E_p}$. Notre objectif est de trouver des opérateurs différentiels hermitiques $\hat{X}^\mu$ et $\hat{P}^\mu$ vérifiant les relations de commutation

$$\begin{cases} \left[\hat{X}^\mu, \hat{X}^\nu\right] = i\hbar\lambda\left(\hat{X}^\mu\delta_0^\nu - \hat{X}^\nu\delta_0^\mu\right) \\ \left[\hat{X}^\mu, \hat{P}^\nu\right] = i\hbar\left(-\eta^{\mu\nu} + \lambda\hat{P}^\nu\delta_0^\mu\right) \\ \left[\hat{P}^\mu, \hat{P}^\nu\right] = 0 \end{cases} \tag{2.113}$$

où $\hbar$ est la constante de Planck réduite ($\hbar = h/(2\pi)$) et le commutateur $[A, B] = AB - BA$.

En s'inspirant du principe de correspondance ordinaire (non déformé), nous avons pu déterminer par la méthode essai et erreur, les opérateurs suivants :

$$\begin{cases} \hat{X}^\mu = x^\mu - i\hbar\lambda\delta_0^\mu x^\nu\frac{\partial}{\partial x^\nu} \\ \hat{P}^\mu = i\hbar\frac{\partial}{\partial x_\mu} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{X}^\mu = x^\mu - i\hbar\lambda\delta_0^\mu x^\nu\partial_\nu \\ \hat{P}^\mu = i\hbar\partial^\mu. \end{cases} \tag{2.114}$$

qui s'écrivent explicitement,

$$\begin{array}{llll} \hat{X}^1 = x^1 = x & \hat{X}^2 = x^2 = y & \hat{X}^3 = x^3 = z & \hat{X}^0 = ct - i\hbar\lambda x^\nu\partial_\nu \\ \hat{P}^1 = i\hbar\frac{\partial}{\partial x_1} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x} & \hat{P}^2 = i\hbar\frac{\partial}{\partial x_2} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial y} & \hat{P}^3 = i\hbar\frac{\partial}{\partial x_3} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial z} & \hat{P}^0 = i\hbar\frac{\partial}{\partial x_0} = i\hbar\frac{\partial}{c\partial t}. \end{array} \tag{2.115}$$

Seul l'opérateur $\hat{X}^0$ associé au temps $x^0 = ct$ a subi une déformation, mais on retrouve l'expression habituelle quand $\lambda \to 0$ ($E_p \to +\infty$). Essayons de montrer que les opérateurs (2.114) vérifient bien les commutateurs (2.113). En effet,

1. $\left[\hat{P}^\mu, \hat{P}^\nu\right] = [i\hbar\partial^\mu, i\hbar\partial^\nu] = 0$

2. $$\begin{aligned} \left[\hat{X}^\mu, \hat{P}^\nu\right] &= [x^\mu - i\hbar\lambda\delta_0^\mu x^\rho\partial_\rho, i\hbar\partial^\nu] = i\hbar\left[x^\mu, \partial^\nu\right] - i\hbar\lambda\delta_0^\mu\left(i\hbar\right)\left[x^\rho\partial_\rho, \partial^\nu\right] \\ &= i\hbar(-\eta^{\mu\nu}) - i\hbar\lambda\delta_0^\mu\left(i\hbar\right)\left[x^\rho, \partial^\nu\right]\partial_\rho = -i\hbar\eta^{\mu\nu} - i\hbar\lambda\delta_0^\mu\left(i\hbar\right)\left(-\eta^{\rho\nu}\right)\partial_\rho \\ &= -i\hbar\eta^{\mu\nu} + i\hbar\lambda\delta_0^\mu\left(i\hbar\partial^\nu\right) = i\hbar\left(-\eta^{\mu\nu} + \lambda\delta_0^\mu\hat{P}^\nu\right) \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} \left[\hat{X}^\mu, \hat{X}^\nu\right] &= [x^\mu - i\hbar\lambda\delta_0^\mu x^\rho\partial_\rho\ ,\ x^\nu - i\hbar\lambda\delta_0^\nu x^\sigma\partial_\sigma] \\ &= [x^\mu, x^\nu] + [x^\mu, -i\hbar\lambda\delta_0^\nu x^\sigma\partial_\sigma] - [i\hbar\lambda\delta_0^\mu x^\rho\partial_\rho, x^\nu] + [i\hbar\lambda\delta_0^\mu x^\rho\partial_\rho, i\hbar\lambda\delta_0^\nu x^\sigma\partial_\sigma] \\ &= 0 - i\hbar\lambda\delta_0^\nu x^\sigma\left[x^\mu, \partial_\sigma\right] - i\hbar\lambda\delta_0^\mu x^\rho\left[\partial_\rho, x^\nu\right] + i\hbar\lambda\delta_0^\mu i\hbar\lambda\delta_0^\nu\left[x^\rho\partial_\rho, x^\sigma\partial_\sigma\right] \\ &= -i\hbar\lambda\delta_0^\nu x^\sigma(-\delta_\sigma^\mu) - i\hbar\lambda\delta_0^\mu x^\rho\left(\delta_\rho^\nu\right) + 0 = i\hbar\lambda\left(\delta_0^\nu x^\mu - i\hbar\delta_0^\mu x^\nu\right) \\ &= i\hbar\lambda\left(\delta_0^\nu x^\mu - \delta_0^\mu x^\nu - i\hbar\delta_0^\nu\delta_0^\mu\left(x^\rho\partial_\rho - x^\sigma\partial_\sigma\right)\right) \\ &= i\hbar\lambda\left(\delta_0^\nu\left(x^\mu - i\hbar\delta_0^\mu x^\rho\partial_\rho\right) - \delta_0^\mu\left(x^\nu - i\hbar\delta_0^\nu x^\sigma\partial_\sigma\right)\right) \\ &= i\hbar\lambda\left(\delta_0^\nu\hat{X}^\mu - \delta_0^\mu\hat{X}^\nu\right) \end{aligned}$$

On conclut qu'il est possible de construire un principe de correspondance pour le $\kappa-$espace de Minkowski en déformant uniquement l'opérateur associé au temps, alors que les autres opérateurs restent identiques aux opérateurs du principe de correspondance non déformé.

2.3.2 L'équation de Klein-Gordon déformée dans l'espace des positions

Maintenant, nous allons utiliser le principe de correspondance discuté ci-dessus afin d'écrire une équation de Klein-Gordon déformée [46, 47]. Autrement dit, commençant par la relation de dispersion énergie-impulsion de Magueijo-Smolin sous la forme

$$E^2 - \vec{p}^2c^2 - m^2c^4\left(1 - 2\frac{E}{E_p} + \frac{E^2}{E_p^2}\right) = 0 \tag{2.116}$$

il suffit de faire la substitution

$$E \to i\hbar\partial_t \qquad p_x \to -i\hbar\partial_x \qquad p_y \to -i\hbar\partial_y \qquad p_z \to -i\hbar\partial_z \tag{2.117}$$

pour déduire que la fonction d'onde de Klein-Gordon déformée $\phi(\overrightarrow{r}, t)$ va obéir à l'équation linéaire aux dérivées partielles

$$\Delta\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\phi + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\left(2i\frac{\hbar}{E_p}\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{E_p^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}\right) = 0 \tag{2.118}$$

où $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ est l'opérateur de Laplace. C'est une équation de deuxième degré qui tend vers l'équation de Klein-Gordon ordinaire quand $E_p \to +\infty$. Il est utile de la réécrire sous l'expression

$$\left(1 - \frac{m^2c^4}{E_p^2}\right)\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - 2\frac{i}{\hbar}\frac{m^2c^4}{E_p}\frac{\partial\phi}{\partial t} - c^2\Delta\phi + +\frac{m^2c^4}{\hbar^2}\phi = 0 \tag{2.119}$$

d'où son complexe conjugué qui aura la forme

$$\left(1 - \frac{m^2c^4}{E_p^2}\right)\frac{\partial^2\phi^*}{\partial t^2} + 2\frac{i}{\hbar}\frac{m^2c^4}{E_p}\frac{\partial\phi^*}{\partial t} - c^2\Delta\phi^* + +\frac{m^2c^4}{\hbar^2}\phi^* = 0. \tag{2.120}$$

Multiplions la première équation par ϕ^* et le deuxième par ϕ, ensuite calculons leur différence afin d'avoir l'équation

$$\left(1 - \frac{m^2c^4}{E_p^2}\right)\left(\phi^*\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \phi\frac{\partial^2\phi^*}{\partial t^2}\right) - 2\frac{i}{\hbar}\frac{m^2c^4}{E_p}\left(\phi^*\frac{\partial\phi}{\partial t} + \phi\frac{\partial\phi^*}{\partial t}\right) - c^2\left(\phi^*\Delta\phi - \phi\Delta\phi^*\right) = 0 \tag{2.121}$$

qui devient après transformation,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\left(1 - \frac{m^2c^4}{E_p^2}\right)\left(\phi^*\frac{\partial\phi}{\partial t} - \phi\frac{\partial\phi^*}{\partial t}\right) - \frac{2i}{\hbar}\frac{m^2c^4}{E_p}\phi^*\phi\right) + \vec{\nabla}.\left(-c^2\phi^*\vec{\nabla}\phi + c^2\phi\vec{\nabla}\phi^*\right) = 0. \tag{2.122}$$

Cette équation est une équation de conservation du type $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}.\vec{J} = 0$ si on pose

$$\begin{cases} \rho = i\left(1 - \frac{m^2c^4}{E_p^2}\right)\left(\phi^* \frac{\partial \phi}{\partial t} - \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial t}\right) + \frac{2}{\hbar}\frac{m^2c^4}{E_p}\left|\phi\right|^2 \\ \vec{J} = -ic^2\left(\phi^* \vec{\nabla}\phi - \phi \vec{\nabla}\phi^*\right). \end{cases} \tag{2.123}$$

Comme la fonction ρ est réelle $(\rho = \rho^*)$, elle peut être interprétée comme une densité de charge à un facteur près contenant la charge.

Maintenant, cherchons une solution de cette équation sous forme d'une onde plane de la forme

$$\phi(\overrightarrow{r}, t) = u\ e^{-\frac{i}{\hbar}p_\mu x^\mu} = u\ e^{-\frac{i}{\hbar}\left(Et - \vec{p}.\overrightarrow{r}\right)} \tag{2.124}$$

où u est une constante. Après injection, on aura

$$\left(-\frac{\vec{p}^2}{\hbar^2} + \frac{E^2}{\hbar^2c^2} + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\left(-1 + 2i\frac{\hbar}{E_p}\left(-\frac{iE}{\hbar}\right) + \frac{\hbar^2}{E_p^2}\left(-\frac{E^2}{\hbar^2}\right)\right)\right) u\ e^{-\frac{i}{\hbar}\left(Et - \vec{p}.\overrightarrow{r}\right)} = 0 \tag{2.125}$$

d'où la relation de dispersion de Magueijo-Smolin

$$E^2 - \vec{p}^2c^2 = m^2c^4\left(1 - \frac{E}{E_p}\right)^2 \tag{2.126}$$

ce qui est tout à fait naturel car elle est à la base de l'équation de Klein-Gordon déformée ci-dessus.

Il faut savoir aussi qu'il est possible de transformer notre équation en équation du premier ordre par rapport au temps t, ayant deux composantes, ce qui va nous permettre d'en déduire son hamiltonien. En effet, si on pose $A = \frac{m^2c^4}{E_p}$ et $B = 1 - \frac{m^2c^4}{E_p^2} = 1 - \frac{A}{E_p}$, un calcul trivial montre que la relation de Magueijo-Smolin peut prendre la forme

$$\left(E - \frac{A}{B}\right)^2 = \frac{\vec{p}^2c^2 + m^2c^4}{B} + \frac{A^2}{B^2}. \tag{2.127}$$

Cela va nous permettre d'écrire l'équation de Klein-Gordon déformée sous la forme

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - \frac{A}{B}\right)^2 \phi(\overrightarrow{r}, t) = \left(\frac{-\hbar^2c^2}{B}\Delta + \frac{m^2c^4}{B} + \frac{A^2}{B^2}\right)\phi(\overrightarrow{r}, t). \tag{2.128}$$

Maintenant, introduisons de nouvelles fonctions $\varphi(\overrightarrow{r}, t)$ et $\chi(\overrightarrow{r}, t)$ telles que

$$\begin{cases} \varphi(\overrightarrow{r}, t) + \chi(\overrightarrow{r}, t) = \phi(\overrightarrow{r}, t) \\ \frac{mc^2}{B}\left(\varphi(\overrightarrow{r}, t) - \chi(\overrightarrow{r}, t)\right) = \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - \frac{A}{B}\right)\phi(\overrightarrow{r}, t). \end{cases} \tag{2.129}$$

et remplaçons dans (2.128)

$$\frac{mc^2}{B}\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - \frac{A}{B}\right)(\varphi - \chi) = \left(\frac{-\hbar^2c^2}{B}\Delta + \frac{m^2c^4}{B} + \frac{A^2}{B^2}\right)(\varphi + \chi). \tag{2.130}$$

Sachant que la deuxième équation de (2.129) est équivalente à

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-\frac{A}{B}\right)(\varphi+\chi)=\frac{mc^2}{B}(\varphi-\chi), \tag{2.131}$$

il est possible d'en déduire le système suivant :

$$\begin{cases} i\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\frac{-\hbar^2}{2m}\Delta(\varphi+\chi)+\frac{mc^2-A}{B}\varphi \\ i\hbar\frac{\partial\chi}{\partial t}=\frac{\hbar^2}{2m}\Delta(\varphi+\chi)-\frac{mc^2+A}{B}\chi \end{cases} \tag{2.132}$$

qui s'écrit sous forme matricielle

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix}\varphi\\ \chi\end{bmatrix}=-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varphi\\ \chi\end{bmatrix}+mc^2\begin{bmatrix}\frac{1}{1+\frac{mc^2}{E_p}} & 0\\ 0 & -\frac{1}{1-\frac{mc^2}{E_p}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varphi\\ \chi\end{bmatrix}. \tag{2.133}$$

Posons $\Phi=[\varphi\ \ \chi]^t$ afin de réécrire cette équation sous la forme réduite (qui est aussi la forme de Schrödinger)

$$i\hbar\frac{\partial\Phi}{\partial t}=\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\left(\sigma^3+i\sigma^2\right)+mc^2\left(\frac{1}{1+\frac{mc^2}{E_p}}\frac{\sigma^3+\sigma^0}{2}+\frac{1}{1-\frac{mc^2}{E_p}}\frac{\sigma^3-\sigma^0}{2}\right)\right)\Phi. \tag{2.134}$$

On voit ici apparaître les matrices de Pauli $\{\sigma^0,\sigma^1,\sigma^2,\sigma^3\}$. L'expression de l'opérateur hamiltonien associé à l'équation de Klein-Gordon déformée est

$$\hat{H}=-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\left(\sigma^3+i\sigma^2\right)+\frac{mc^2}{1+\frac{mc^2}{E_p}}\frac{\sigma^3+\sigma^0}{2}+\frac{mc^2}{1-\frac{mc^2}{E_p}}\frac{\sigma^3-\sigma^0}{2}. \tag{2.135}$$

Dans la limite $E_p\to+\infty$, ce hamiltonien se simplifie sous la forme (2.14).

2.3.3 L'équation de Dirac déformée dans l'espace des positions

Dans le but de généraliser la démarche de Dirac au cas de la relativité spéciale déformée [46, 47], nous allons chercher des matrices $\alpha^i, i=1..3$ et β de telle sorte que la relation de dispersion de Magueijo-Smolin

$$E^2=\vec{p}^2c^2+m^2c^4\left(1-\frac{E}{E_p}\right)^2 \tag{2.136}$$

s'écrive sous la forme

$$E^2=\left(c\ \vec{\alpha}.\vec{p}+\beta m_oc^2\left(1-\frac{E}{E_p}\right)\right)^2 \tag{2.137}$$

d'où

$$E^2=c^2\ \vec{\alpha}.\vec{p}\ \vec{\alpha}.\vec{p}+m_oc^3\left(1-\frac{E}{E_p}\right)(\vec{\alpha}.\vec{p}\ \beta+\beta\ \vec{\alpha}.\vec{p})+\beta^2m_o^2c^4\left(1-\frac{E}{E_p}\right)^2. \tag{2.138}$$

Par identification avec l'équation du départ, on aura les relations

$$\begin{cases} \vec{\alpha}.\vec{p}\ \vec{\alpha}.\vec{p} = \vec{p}^2 \\ \vec{\alpha}.\vec{p}\ \beta + \beta\vec{\alpha}.\vec{p} = 0 \\ \beta^2 = 1. \end{cases} \tag{2.139}$$

C'est exactement les propriétés (2.18) des matrices de Dirac bien connues en mécanique quantique relativiste. Maintenant, on déduit de (2.137) que

$$E = c\ \vec{\alpha}.\vec{p} + \beta m_o c^2 \left(1 - \frac{E}{E_p}\right). \tag{2.140}$$

A l'aide de la correspondance

$$E \to i\hbar\partial_t \qquad p_x \to -i\hbar\partial_x \qquad p_y \to -i\hbar\partial_y \qquad p_z \to -i\hbar\partial_z \tag{2.141}$$

l'équation de Dirac déformée aura la forme [46]

$$i\hbar\partial_t\Psi = -i\hbar c\ \vec{\alpha}.\vec{\nabla}\Psi + \beta m_o c^2 \left(\Psi - \frac{i\hbar}{E_p}\partial_t\Psi\right) \tag{2.142}$$

où $\Psi(\vec{r},t)$ est un spineur de Dirac ayant quatre composantes ($\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)^t$). Il est évident que quand $E_p \to +\infty$, on retrouve l'équation non déformée. Afin de déterminer le hamiltonien $\hat{H}$ de notre équation, on va d'abord l'écrire sous la forme

$$i\hbar\left(1 + \frac{m_o c^2}{E_p}\beta\right)\partial_t\Psi = -i\hbar c\ \vec{\alpha}.\vec{\nabla}\Psi + \beta m_o c^2\Psi \tag{2.143}$$

et comme $\left(1 + \frac{m_o c^2}{E_p}\beta\right)^{-1} = \frac{E_p^2}{E_p^2 - m_o^2 c^4}\left(1 - \frac{m_o c^2}{E_p}\beta\right)$, elle deviendra

$$i\hbar\partial_t\Psi = \frac{E_p^2}{E_p^2 - m_o^2 c^4}\left(1 - \frac{m_o c^2}{E_p}\beta\right)\left(-i\hbar c\ \vec{\alpha}.\vec{\nabla} + \beta m_o c^2\right)\Psi \tag{2.144}$$

d'où le hamiltonien du premier degré

$$\hat{H} = \frac{E_p^2}{E_p^2 - m_o^2 c^4}\left(1 - \frac{m_o c^2}{E_p}\beta\right)\left(-i\hbar c\ \vec{\alpha}.\vec{\nabla} + \beta m_o c^2\right). \tag{2.145}$$

Rappelons-nous que le hamiltonien de Dirac non déformé est $\hat{H}_D = -i\hbar c\ \vec{\alpha}.\vec{\nabla} + \beta m_o c^2$, donc

$$\hat{H} = \frac{E_p^2}{E_p^2 - m_o^2 c^4}\left(1 - \frac{m_o c^2}{E_p}\beta\right)\hat{H}_D \tag{2.146}$$

Vérifions à présent que notre équation décrit bien une particule de spin $\frac{1}{2}$ en calculant le commutateur $\left[\hat{H}, \hat{L}^j + \frac{\hbar}{2}\Sigma^j\right]$ où les $\hat{L}^j$ sont les composantes du moment cinétique orbital

et les $\frac{\hbar}{2}\Sigma^j$ celles du spin. En effet, l'utilisation des résultats (2.33), (2.36), et (2.39) nous permet d'avoir

$$\begin{aligned}\left[\hat{H},\hat{L}^j\right] &= \frac{E_p^2}{E_p^2-m_o^2c^4}\left(1-\frac{m_oc^2}{E_p}\beta\right)\left[\hat{H}_D,\hat{L}^j\right]\\ &= -\frac{E_p^2}{E_p^2-m_o^2c^4}\left(1-\frac{m_oc^2}{E_p}\beta\right)\hbar^2c\,\varepsilon^{jki}\alpha^k\partial_i.\end{aligned}$$

Ce résultat montre que le moment cinétique orbital n'est pas conservé, donc le moment cinétique du spin doit être non nul. En effet, on a aussi

$$\begin{aligned}\left[\hat{H},\tfrac{\hbar}{2}\Sigma^j\right] &= \left[\frac{E_p^2}{E_p^2-m_o^2c^4}\left(1-\frac{m_oc^2}{E_p}\beta\right)\hat{H}_D\ ,\ \tfrac{\hbar}{2}\Sigma^j\right]\\ &= \frac{E_p^2}{E_p^2-m_o^2c^4}\left(\left(1-\frac{m_oc^2}{E_p}\beta\right)\left[\hat{H}_D,\tfrac{\hbar}{2}\Sigma^j\right]+\left[1-\frac{m_oc^2}{E_p}\beta,\tfrac{\hbar}{2}\Sigma^j\right]\hat{H}_D\right)\\ &= \frac{E_p^2}{E_p^2-m_o^2c^4}\left(1-\frac{m_oc^2}{E_p}\beta\right)\left[\hat{H}_D,\tfrac{\hbar}{2}\Sigma^j\right]\\ &= \frac{E_p^2}{E_p^2-m_o^2c^4}\left(1-\frac{m_oc^2}{E_p}\beta\right)\hbar^2c\,\varepsilon^{jki}\alpha^k\partial_i.\end{aligned}$$

Alors, le moments cinétique total $\hat{J}^{\,j}=\hat{L}^j+\frac{\hbar}{2}\Sigma^j$ est conservé car

$$\left[\hat{H},\hat{L}^j+\frac{\hbar}{2}\Sigma^j\right]=0. \tag{2.147}$$

A ce stade, introduisons les matrices γ^μ de Dirac définies par les relations $\gamma^0=\beta$ et $\vec{\gamma}=\beta\vec{\alpha}$. La multiplication à gauche de (2.142) par la matrice β nous permet d'en déduire la forme

$$i\hbar\gamma^0\partial_t\Psi+i\hbar c\overrightarrow{\gamma}.\vec{\nabla}\Psi-m_oc^2\left(\Psi-\frac{i\hbar}{E_p}\partial_t\Psi\right)=0. \tag{2.148}$$

Sachant que $\partial_0=c^{-1}\partial_t$ et que $(\partial_1,\partial_2,\partial_3)=\vec{\nabla}$, notre équation devient

$$\left(i\left(\gamma^\mu+\frac{m_oc^2}{E_p}\delta_0^\mu\right)\partial_\mu-\frac{m_oc}{\hbar}\right)\Psi=0. \tag{2.149}$$

Cette forme est très proche de la forme covariante de l'équation de Dirac ordinaire (avant la déformation). D'ailleurs, quand $E_p\to+\infty$, on la retrouve bien.

Avant de passer à la sous-section suivante, il est intéressant de souligner que si on pose $\lambda=\frac{1}{E_p}$, le hamiltonien déformé va prendre la forme

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \left(\tfrac{1-\lambda m_oc^2\beta}{1-\lambda^2m_o^2c^4}\right)\left(-i\hbar c\ \vec{\alpha}.\vec{\nabla}+\beta m_oc^2\right)\\ \hat{H} &= \tfrac{1-\lambda m_oc^2\beta}{1-\lambda^2m_o^2c^4}c\ \vec{\alpha}.\left(-i\hbar\vec{\nabla}\right)+\tfrac{m_oc^2}{1-\lambda^2m_o^2c^4}\beta-\tfrac{\lambda m_o^2c^4}{1-\lambda^2m_o^2c^4}.\end{aligned} \tag{2.150}$$

Nous avons là exactement une expression identique à l'expression (2.83) écrite dans l'espace des impulsions. Cela veut dire que si on se propose de trouver une solution sous forme d'une

onde plane d'expression $\psi(\vec{r},t) = u(p)e^{-\frac{i}{\hbar}\left(Et-\vec{p}.\vec{r}\right)}$ de l'équation $i\hbar\partial_t\psi = \hat{H}\psi$, on aboutira à l'équation aux valeurs propres

$$\left(\frac{1-\lambda m_o c^2\beta}{1-\lambda^2 m_o^2 c^4}c\ \vec{\alpha}.\vec{p} + \frac{m_o c^2}{1-\lambda^2 m_o^2 c^4}\beta - \frac{\lambda m_o^2 c^4}{1-\lambda^2 m_o^2 c^4}\right)u(p) = Eu(p) \tag{2.151}$$

qui est exactement identique à l'équation (2.82) qu'on a déjà résolue à l'aide de la transformation de Foldy- Wouthuysen déformée (FWD). On peut donc conclure en affirmant que les formulations dans l'espace des positions et dans l'espace des impulsions sont compatibles.

2.3.4 L'équation de continuité et la densité de courant

Dans ce qui suit, nous allons chercher la densité de probabilité de présence relative à l'équation de Dirac déformée (2.142). Rappelons d'abord que la matrice $A^\dagger$ adjointe de la matrice A n'est rien d'autre que la transposée de la matrice conjuguée de A ($A^\dagger = (A^*)^t = (A^t)^*$) et que $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$. Sachant que les matrices α^i et β anticommutent et que $(\alpha^i)^\dagger = \alpha^i$ et $\beta^\dagger = \beta$, l'adjointe de l'équation

$$i\hbar\partial_t\Psi = -i\hbar c\ \alpha^i\partial_i\Psi + m_o c^2\beta\Psi - i\hbar\frac{m_o c^2}{E_p}\beta\ \partial_t\Psi \tag{2.152}$$

sera l'équation

$$-i\hbar\partial_t\Psi^\dagger = i\hbar c\ \partial_i\Psi^\dagger\alpha^i + m_o c^2\Psi^\dagger\beta + i\hbar\frac{m_o c^2}{E_p}\partial_t\Psi^\dagger\beta. \tag{2.153}$$

Maintenant, si on multiplie la première équation par $\frac{\Psi^\dagger}{i\hbar}$ à gauche et la deuxième par $\frac{-\Psi}{i\hbar}$ à droite et qu'on prend leur somme, on aura la relation

$$i\hbar\Psi^\dagger\partial_t\Psi + \partial_t\Psi^\dagger\ \Psi = -\left(\Psi^\dagger\alpha^i\partial_i\Psi - \partial_i\Psi^\dagger\alpha^i\Psi\right) - \frac{m_o c^2}{E_p}\left(\Psi^\dagger\beta\partial_t\Psi + \partial_t\Psi^\dagger\ \beta\Psi\right) \tag{2.154}$$

d'où l'équation [46]

$$\partial_t\left(\Psi^\dagger\Psi + \frac{m_o c^2}{E_p}\Psi^\dagger\beta\Psi\right) + \partial_i(\Psi^\dagger c\alpha^i\Psi) = 0. \tag{2.155}$$

Cette dernière est une équation de continuité de la forme $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}.\vec{J} = 0$ si on pose

$$\begin{cases} \rho = \Psi^\dagger\left(1 + \frac{m_o c^2}{E_p}\beta\right)\Psi \\ \vec{J} = \Psi^\dagger c\vec{\alpha}\Psi. \end{cases} \tag{2.156}$$

Nous avons donc une densité de probabilité de présence $\rho = \Psi^\dagger\left(1 + \frac{m_o c^2}{E_p}\beta\right)\Psi$ qui a subi une déformation vu l'apparition du terme $\frac{m_o c^2}{E_p}\beta$, et une densité du courant de probabilité $\vec{J} = \Psi^\dagger c\vec{\alpha}\Psi$ sans modification par rapport au cas non déformé.

Explicitement, la densité ρ a l'expression

$$\rho(\overrightarrow{r},t)=\left(1+\frac{m_oc^2}{E_p}\right)\left(|\Psi_1|^2+|\Psi_2|^2\right)+\left(1-\frac{m_oc^2}{E_p}\right)\left(|\Psi_3|^2+|\Psi_4|^2\right).$$

Pour que ρ soit positive quelque soit $\psi=(\psi_1,\psi_2,\psi_3,\psi_4)^t$, il faut que $m_o \preceq \frac{E_p}{c^2}$. Autrement dit, la masse au repos m_o de notre particule doit être inférieure à la masse de Planck $m_p=\frac{E_p}{c^2}\simeq 2,17651\times 10^{-8}$ Kg. Cette condition est loin de poser des problèmes dans le cas des particules élémentaires qu'on souhaite décrire, car la masse de la plus lourde d'entre elles (le quark top) est approximativement égale à 3.09×10^{-25} Kg. Il reste quand même que les deux premières composantes de ψ et les deux dernières n'apparaissent pas d'une façon symétrique dans l'expression de la densité ρ, ce qui n'est pas le cas d'ordinaire où $\rho=|\Psi_1|^2+|\Psi_2|^2+|\Psi_3|^2+|\Psi_4|^2$.

À la fin du présent chapitre, nous pouvons dire que nous avons démontré la possibilité d'écrire une équation de Dirac déformée dans l'espace des impulsions ainsi que dans l'espace des positions, en accord avec les exigences de la relativité spéciale déformée.

Chapitre 3

La mécanique analytique généralisée aux systèmes avec contraintes

La mécanique analytique est une formulation mathématique très élégante, très analytique de la mécanique classique. En effet, à l'aide du principe de moindre action issu du calcul variationnel, les équations du mouvement s'obtiennent à partir d'un lagrangien scalaire contrairement à la mécanique vectorielle de Newton. Ensuite, en utilisant la transformation de Legendre, il est possible de passer à la formulation hamiltonienne qui joue un rôle capital dans la description quantique des systèmes classiques. Cependant, elle se heurte à de grandes difficultés en présence de systèmes décrits par des lagrangiens singuliers (appelés aussi systèmes hamiltoniens avec contraintes).

Ces systèmes sont souvent présents en physique théorique, comme c'est le cas en électromagnétisme, en relativité, en physique des particules,... Toutes les théories de jauge s'accompagnent de contraintes, d'où l'intérêt des physiciens comme Dirac [11], Bergmann [86], Faddeev et Jackiw [87], Gitman [18], Hojman [94, 95], Müller-Kirsten [20], Henneaux [19],... pour ces systèmes particuliers. En effet, c'est la quantification de ces derniers qui pose problème, car les crochets de Poisson ne sont plus adaptés à ce genre de situations, ce qui crée des anomalies quand on procède à une quantification canonique d'une façon "naïve" en postulants les relations de commutation qui en découlent.

Dans ce chapitre, nous allons essayer d'exposer l'essentiel de deux approches différentes d'aborder ce problème, à savoir d'une part le formalisme de Dirac et Bergmann, et d'autre part la méthode de Faddeev et Jackiw. Dans ces deux cas, nous allons voir qu'à cause des contraintes, la solution consiste à remplacer les crochets de Poisson par des crochets un peu plus compliqués obtenus par des voies différentes, mais en gardant toujours le même esprit de la mécanique analytique et de la quantification canonique.

3.1 Rappel de la mécanique analytique

En mécanique analytique, la description des systèmes se fait à l'aide de fonctions scalaires comme le lagrangien L, le hamiltonien H, l'action $S, ...$ évitant ainsi le caractère

vectoriel des variables dynamiques. La physique ne subit aucun changement par rapport au formalisme newtonien (principe fondamental de la dynamique, théorème de l'énergie cinétique, théorème du moment cinétique...), mais d'un point de vue mathématique, les choses sont loin d'être les mêmes car la mécanique analytique donne naissance à des formalismes généraux, élégants et puissants où les symétries et les invariances deviennent apparentes. Par exemple, la détermination directe des intégrales premières et la facilité du traitement des contraintes holonomes en sont des avantages. Elle s'adapte naturellement aux exigences de la physique moderne, que ce soit la physique statistique, la relativité, la mécanique quantique, la théorie des champs,...

3.1.1 Principe de moindre action et équations de Lagrange

Classiquement, la connaissance à un instant t des N coordonnées généralisées $q(t) = (q_1(t), q_2(t), q_3(t), ..., q_N(t))$ ainsi que les N vitesses généralisées $\dot{q}(t) = \frac{dq(t)}{dt} = (\dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t), \dot{q}_3(t), ..., \dot{q}_N(t))$ d'un système mécanique permet de connaître parfaitement son état. Le nombre N est le nombre de degrés de liberté de notre système (sa dimension). Comprendre l'évolution de ce dernier nécessite l'introduction d'une action $S(q)$ qui est une fonctionnelle de $q(t)$ définie par l'intégrale suivante :

$$S(q) = \int_{t_i}^{t_f} L(q(t), \dot{q}(t), t)dt \tag{3.1}$$

où $L(q(t), \dot{q}(t), t)$ est le lagrangien du système et $(t_i,\ t_f)$ sont les instants initial et final. Pour aller du point $q(t_i)$ de l'espace des configurations occupé à l'instant t_i vers le point $q(t_f)$ occupé à l'instant t_f, le système a une infinité de chemins possibles, mais le principe de moindre action (principe de Hamilton) stipule que la trajectoire physique est celle qui rend l'action stationnaire. Autrement dit, il faut que $\delta S(q) = 0$, ce qui va nous donner les équations du mouvement comme le montre la démarche suivante [1] :

$$\begin{aligned}
\delta S(q) &= \int_{t_i}^{t_f} \delta L(q(t), \dot{q}(t), t)dt = \int_{t_i}^{t_f} \left(\tfrac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \tfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i \right) dt \qquad i = 1...N \\
&= \int_{t_i}^{t_f} \left[\tfrac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \tfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \tfrac{d}{dt} q_i \right] dt = \int_{t_i}^{t_f} \left[\tfrac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \tfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\tfrac{d}{dt}\delta q_i \right] dt \\
&= \int_{t_i}^{t_f} \left[\tfrac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \tfrac{d}{dt}\left(\tfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i \right) - \tfrac{d}{dt}\left(\tfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i \right] dt
\end{aligned}$$

donc

$$\delta S(q) = \int_{t_i}^{t_f} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] \delta q_i dt + \underbrace{\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i \right]_{t_i}^{t_f}}_{=0}. \tag{3.2}$$

1. Nous allons adopter la convention d'Einstein en sommant sur les indices répétés deux fois dans une expression mathématique.

Le dernier terme s'annule, car $\delta q(t_i) = \delta q(t_f) = 0$ (tous les chemins passent par les points $q(t_i)$ et $q(t_f)$, donc ils ne subissent pas de variations en ces points), et comme les coordonnées généralisées $q(t)$ sont indépendantes entre elles, leurs variations $\delta q(t)$ le sont aussi. Donc, pour que l'action $S(q)$ soit stationnaire ($\delta S(q) = 0$) il faut que

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \qquad\qquad i = 1...N. \tag{3.3}$$

Il s'agit d'équations différentielles de deuxième degré qui portent le nom des équations d'Euler-Lagrange. Elles régissent l'évolution de notre système en respectant le principe de moindre action. Il est à signaler que lagrangien n'est pas unique, car si on remplace L par $L' = \alpha L + \frac{d}{dt} f(q,t)$ dans l'expression de l'action $S(q)$, les équations d'Euler-Lagrange seront identiques à condition que α soit une constante réelle et $f(q,t)$ une fonction dépendant seulement du temps et des coordonnées généralisées.

Maintenant, plaçons-nous dans le cas où le système mécanique subit des contraintes dues à des forces de liaison qui peuvent restreindre son mouvement. Dans ce cas, les variables dynamiques $q(t)$ ne peuvent pas varier librement, mais en respectant ces contraintes. Le cas qui nous intéresse est celui des contraintes holonomes ayant la forme $\phi(q(t),t) = 0$ étudiées depuis Lagrange en faisant appel à des multiplicateurs intermédiaires.

Supposons alors que notre système présente M contraintes holonomes $\phi_m(q(t),t) = 0$, $m = 1...M$. Si L est le lagrangien du départ avec N degrés de liberté, la méthode des multiplicateurs notés $\lambda_m = \lambda_m(t)$, $m = 1...M$ consiste à introduire un nouveau lagrangien

$$\tilde{L} = L + \lambda_m(t)\phi_m(q,t) \tag{3.4}$$

et de prendre les équations d'Euler-Lagrange comme s'il s'agissait d'un système de $N + M$ degrés de liberté (q, λ). Autrement dit,

$$\begin{array}{lll} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = -\lambda_m \frac{\partial \phi_m}{\partial q_i} & & i = 1...N \\ \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \lambda_m} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\lambda}_m} = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi_m(q,t) = 0 & & m = 1...M. \end{array} \tag{3.5}$$

La résolution de ces équations du mouvement déterminera l'évolution de l'état de notre système sous l'effet des contraintes holonomes $\phi_m(q,t) = 0$, $m = 1...M$.

3.1.2 Formalisme hamiltonien et crochets de Poisson

La transformation de Legendre constitue le lien-clé entre le formalisme lagrangien et le formalisme hamiltonien car elle permet de construire la fonction de Hamilton H à partir de la fonction de Lagrange L. Nous introduisons d'abord les N nouvelles variables $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(q, \dot{q}, t)$ appelées les moments conjugués, on peut ainsi écrire les équations d'Euler-Lagrange sous la forme

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(q, \dot{q}, t) \qquad\qquad \dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} \qquad\qquad i = 1...N. \tag{3.6}$$

Les équations $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(q, \dot{q}, t)$ doivent être inversées par rapport aux vitesses généralisées $\dot{q}$ afin de remplacer ces dernières par leurs expressions $\dot{q} = \dot{q}(q, p, t)$ dans le hamiltonien $H(q, p, t)$ ci-dessous

$$H(q, p, t) = p_i \dot{q}_i - L = p_i \dot{q}_i(q, p, t) - L. \tag{3.7}$$

Afin d'appliquer le principe de moindre action avec H, remarquons d'abord que $L = p_i \dot{q}_i - H$, ce qui implique que

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int_{t_i}^{t_f} \delta L dt = \int_{t_i}^{t_f} \delta \left(p_i \ \dot{q}_i - H \left(q, p, t \right) \right) dt \\
&= \int_{t_i}^{t_f} \left(\delta p_i \dot{q}_i + p_i \delta \dot{q}_i - \tfrac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i - \tfrac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i \right) dt \\
&= \int_{t_i}^{t_f} \tfrac{d}{dt} \left(p_i \delta q_i \right) dt + \int_{t_i}^{t_f} \left(\left(\dot{q}_i - \tfrac{\partial H}{\partial p_i} \right) \delta p_i - \left(\dot{p}_i + \tfrac{\partial H}{\partial q_i} \right) \delta q_i \right) dt \\
&= \left(p_i \delta q_i \right) |_{t_i}^{t_f} + \int_{t_i}^{t_f} \left(\left(\dot{q}_i - \tfrac{\partial H}{\partial p_i} \right) \delta p_i - \left(\dot{p}_i + \tfrac{\partial H}{\partial q_i} \right) \delta q_i \right) dt.
\end{aligned}$$

Le premier terme est nul car tous les chemins passent par les extrémités $q(t_i)$ et $q(t_f)$ où $\delta q(t_i) = \delta q(t_f) = 0$. Finalement

$$\delta S = \int_{t_i}^{t_f} \left[\left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \delta p_i - \left(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \delta q_i \right] dt. \tag{3.8}$$

Les variations $(\delta q, \delta p)$ sont indépendantes car les variables (q, p) le sont, et le seul moyen de s'assurer que $\delta S = 0$ est d'imposer à la trajectoire physique de vérifier les équations canoniques de Hamilton

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad , \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad i = 1.....N. \tag{3.9}$$

C'est un système de $2N$ équations différentielles du premier degré équivalent aux N équations d'Euler-Lagrange de deuxième degré.

A ce stade, introduisons les crochets de Poisson qui n'ont cessé d'être d'une grande importance dans divers domaines de la physique mathématique surtout lorsqu'il s'agit de procéder à une quantification canonique d'un système classique. Soit $f = f(q, p, t)$ une grandeur physique qui dépend des coordonnées généralisées, des moments conjugués et du temps, sa dérivée totale par rapport au temps est

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \right). \tag{3.10}$$

A l'aide des équations canoniques (3.9) on aura

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \quad \Rightarrow \quad \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\} \tag{3.11}$$

où $\{f, H\}$ est le crochet de Poisson de f et H. D'une manière générale, le crochet de Poisson de deux fonctions $f(q, p, t)$ et $g(q, p, t)$ se définit par

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}. \tag{3.12}$$

Il suffit de prendre $f = q_i$ ensuite $f = p_i$ et d'utiliser la relation (3.11) pour avoir les équations canoniques

$$\dot{q}_i = \{q_i, H\} \qquad \dot{p}_i = \{p_i, H\} \qquad i = 1...N. \tag{3.13}$$

La définition (3.12) nous permet de calculer les crochets fondamentaux relatifs aux variables canoniques (q, p), et cela nous donne

$$\{q_i, q_j\} = 0 \qquad \{p_i, p_j\} = 0 \qquad \{q_i, p_j\} = \delta_{ij} \qquad i, j = 1...N \tag{3.14}$$

où δ_{ij} est le symbole Kronecker ($\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$ et $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$). Il est possible d'utiliser ces crochets afin de réécrire le crochet $\{f, g\}$ sous la forme

$$\{f, g\} = \{q_i, q_j\}\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_j} + \{q_i, p_j\}\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_j} + \{p_i, q_j\}\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_j} + \{p_i, p_j\}\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial p_j}. \tag{3.15}$$

On déduit aussi de l'expression (3.12) les propriétés suivantes des crochets de Poisson : si α et β sont deux réels, et f, g et h trois fonctions qui dépendent de q, p et t, alors

$$\begin{cases} 1.\ \{f, g\} = -\{g, f\} \quad \Rightarrow \quad \{f, f\} = 0 & \text{(Antisymétrie)} \\ 2.\ \{\alpha f + \beta g, h\} = \alpha\{f, h\} + \beta\{g, h\} & \text{(Linéarité)} \\ 3.\ \{f\ g, h\} = f\ \{g, h\} + \{f, h\}\ g & \text{(Règle de Leibniz)} \\ 4.\ \{f, \{g, h\}\} + \{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\} = 0 & \text{(Identité de Jacobi).} \end{cases} \tag{3.16}$$

3.1.3 Quantification canonique

Un des problèmes centraux de la physique théorique est l'étude du comportement d'un système à l'échelle microscopique, où toute approximation classique cesse d'être valable et aboutit à des résultats erronés. Il s'agit là de la question de quantification et du passage de la version classique vers une description quantique d'un certain nombre de phénomènes de la nature.

La quantification canonique d'un système classique se fait à l'aide du formalisme hamiltonien : aux grandeurs classiques $f(q, p, t)$ et $g(q, p, t)$ définies dans l'espace des phases,

on fait correspondre des opérateurs hermitiques $\widehat{f} = f(\hat{q}, \hat{p}, t)$ et $\widehat{g} = g(\hat{q}, \hat{p}, t)$ agissant dans l'espace des états (un espace de Hilbert) dont le commutateur vérifie la relation

$$\left[\widehat{f}, \widehat{g}\right] = \widehat{f}\widehat{g} - \widehat{g}\widehat{f} = i\hbar\widehat{\{f, g\}} \tag{3.17}$$

où $\widehat{\{f, g\}}$ est l'opérateur associé au crochet de Poisson $\{f, g\}$, $\hbar = h/2\pi$ est la constante de Planck réduite. On voit bien le rôle crucial joué par les crochets de Poisson dans cette relation et comment ils permettent d'introduire la constante caractéristique de la mécanique quantique ($\hbar$). Avec la définition (3.17), les commutateurs satisfont toutes les propriétés énumérées dans (3.16). Cette manière de faire les choses n'est pas aussi simple qu'il paraît, elle se heurte à un problème majeur lié à l'ordre des opérateurs qui ne commutent pas en général. Heureusement qu'une grande partie des systèmes physiques sont décrit d'une façon simple, ce qui facilite leur quantification. En particulier, les $2N$ opérateurs $\hat{q}_i$ et $\hat{p}_j$ correspondants aux $2N$ variables fondamentales q_i et p_j obéissent aux relations de commutation de base

$$[\hat{q}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij} \qquad [\hat{q}_i, \hat{q}_j] = 0 \qquad [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0 \qquad i, j = 1...N. \tag{3.18}$$

On distingue deux représentations de la mécanique quantique élaborées indépendamment par Heisenberg et Schrödinger. Dans la représentation de Heisenberg, les opérateurs évoluent dans le temps tandis que la fonction d'état $|\Psi\rangle_H$ du système demeure constante. L'équation d'évolution temporelle d'un opérateur $\hat{A}$ dans cette représentation est régie par l'équation

$$\frac{d\hat{A}}{dt} = -\frac{i}{\hbar}\left[\hat{A}, \hat{H}\right] + \frac{\partial\hat{A}}{\partial t} \tag{3.19}$$

sachant que $\hat{H}$ est l'opérateur hamiltonien de ce système. On en déduit facilement les équations de Heisenberg bien connues

$$\frac{d\hat{q}_i}{dt} = -\frac{i}{\hbar}\left[\hat{q}_i, \hat{H}\right] \qquad i = 1...N \tag{3.20}$$

$$\frac{d\hat{p}_i}{dt} = -\frac{i}{\hbar}\left[\hat{p}_i, \hat{H}\right] \qquad i = 1...N. \tag{3.21}$$

Par contre dans la représentation de Schrödinger, les opérateurs restent constants alors que l'état $|\Psi(t)\rangle_S$ varie dans le temps en obéissant à la fameuse équation de Schrödinger

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\Psi(t)\rangle_S = \hat{H}|\Psi(t)\rangle_S.$$

Les deux représentations sont mathématiquement différentes, mais équivalentes du point de vue physique, car elles sont liées par une transformation unitaire et conduisent aux mêmes prédictions sur le plan expérimental.

3.2 Le formalisme de Dirac et Bergmann

Les systèmes hamiltoniens avec contraintes constituent une classe large de systèmes physiques décrits par des lagrangiens singuliers. Cela veut dire que les moments conjugués définis à partir de ces derniers ne sont pas tous inversibles par rapport aux vitesses généralisées, ce qui est dû à la présence de contraintes dans les espaces des phases propres à ces systèmes. Le hamiltonien peut toujours être construit à l'aide de la transformation de Legendre mais les équations canoniques quant à elles, elles doivent être corrigées de telle sorte qu'elles contiennent les contraintes en question.

Pour atteindre cette fin, l'algorithme de Dirac et Bergmann permet dans un premier temps de déterminer toutes les contraintes d'un système avec un processus itératif en imposant des conditions de consistance. Les crochets de Poisson seront ensuite remplacer par les crochets de Dirac qui sont plus adéquats en présence de contraintes, permettant ainsi de quantifier une large catégorie de systèmes singuliers. Les crochets fondamentaux relatifs aux coordonnées et aux moments conjugués sont ainsi modifiés, ce qui peut être considéré comme une origine physique des travaux mathématiques en "géométrie non commutative".

3.2.1 Lagrangiens singuliers en physique

Dans le cas d'un système décrit par N coordonnées généralisées q_i et leurs vitesses associées $\dot{q}_i$, le principe de moindre action conduit aux équations d'Euler-Lagrange $\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$ qu'on peut réécrire explicitement sous la forme

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_i}\ddot{q}_j = \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\partial^2 L}{\partial q_j \partial \dot{q}_i}\dot{q}_j - \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{q}_i} \qquad i,j = 1...N. \tag{3.22}$$

On voit bien apparaître la matrice hessienne $[H_{ij}] = \left[\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}\right]$ donnée par

$$[H_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1 \partial \dot{q}_1} & \cdots & \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1 \partial \dot{q}_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_N \partial \dot{q}_1} & \cdots & \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_N \partial \dot{q}_N} \end{bmatrix}. \tag{3.23}$$

Si le $\det(H_{ij}) \neq 0$, il est possible d'inverser $[H_{ij}]$ et d'exprimer les accélérations $\ddot{q}_i$ comme étant des fonctions des positions q_i et des vitesses $\dot{q}_i$. Dans ce cas, le lagrangien de notre système est régulier. Dans le cas contraire où $\det(H_{ij}) = 0$, les équations d'Euler-Lagrange vont donner naissance à des relations entre les positions et les vitesses sans faire intervenir les accélérations. Cette situation est étrangère à la mécanique classique newtonienne dont le principe fondamental s'exprime justement à l'aide des accélérations ($m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{F}$). Autrement dit, cette fois-ci, notre lagrangien est bien singulier.

La singularité d'un lagrangien autonome [2] $L = L(q, \dot{q})$ n'est pas sans conséquences sur la formulation hamiltonienne. Essayons donc d'en analyser l'impact en commençant par

2. Cela veut dire que le lagrangien ne dépend explicitement du temps $\left(\frac{\partial L}{\partial t} = 0\right)$.

rappeler la définition des moments conjugués $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(q, \dot{q}), i = 1...N$. Pour aller plus loin, il est temps d'inverser cette relation par rapport aux vitesses $\dot{q}$ ce qui n'est possible que dans le cas où la matrice jacobienne $\left[\frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}_j}\right]$ est inversible, résultat bien connu de la théorie des fonctions implicites. Mais, comme

$$\left[\frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}_j}\right] = \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\right] = \left[\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_i}\right] = [H_{ij}] \tag{3.24}$$

on se retrouve en présence de la matrice hessienne $[H_{ij}]$. Cela veut dire que si la matrice $[H_{ij}]$ n'est pas inversible, on ne pourra pas exprimer toutes les vitesses en fonctions des coordonnées et des moments conjugués en utilisant les relations $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, i = 1...N$. En effet, si M est égal à $\dim([H_{ij}]) - \text{rang}([H_{ij}])$, on verra apparaître M relations $\phi_m(q, p) = 0$, $m = 1...M$ liant les coordonnées et les moments conjugués sans faire intervenir les vitesses. Il s'agit là des contraintes primaires de la formulation hamiltonienne. On qualifie aussi de contraintes primaires les restrictions physiques que nous imposons nous même à notre système [3] indépendamment de la définition des moments conjugués. Le choix de ces contraintes n'est pas unique car il est toujours possible de les redéfinir avec de nouvelles combinaisons et réarrangements, mais il y a certaines conditions de régularité qu'il faut satisfaire comme par exemple le fait que les contraintes doivent être indépendantes, dérivables par rapport à leurs arguments et avoir des différentielles non nulles quand on remplace ces contraintes par des zéros dans les expressions de ces dernières [4].

Pour donner forme à tout ce qui vient d'être dit, arrêtons-nous pour observer le cas du lagrangien $L = \frac{(y\dot{x}+\dot{y})^2}{2} + \cos(xy)\dot{z} - \frac{z^2}{2}$. La matrice hessienne dans ce cas est

$$[H_{ij}] = \left[\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_i \partial \dot{x}_j}\right] = \begin{bmatrix} y^2 & y & 0 \\ y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{avec} \qquad (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3) = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}).$$

Le déterminant de cette matrice est nul, ce qui veut dire que notre lagrangien est singulier, et comme le rang de cette dernière est égal à un, on s'attend à avoir deux contraintes primaires. Effectivement,

$$\begin{array}{l} p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = y\left(y\dot{x} + \dot{y}\right) \\ p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = y\dot{x} + \dot{y} \\ p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = \cos(xy) \end{array} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{l} p_x - y p_y = 0 \\ p_z - \cos(xy) = 0 \end{array} .$$

Nous avons deux contraintes primaires $\phi_1 = p_x - y p_y = 0$ et $\phi_2 = p_z - \cos(xy) = 0$. Ici par exemple, il faut éviter les choix du type $\sqrt{\phi_1} = 0$, $|\phi_2| = 0$ et $\frac{1}{y}\phi_1 = 0$ vu les problèmes liés aux domaines de définition et à la dérivation qui en résultent. Il ne faut pas non plus prendre $\frac{1}{2}(\phi_1)^2 + \phi_1\phi_2 = 0$ dont la différentielle totale est nulle quand ϕ_1 et ϕ_2

3. Par exemple, une contrainte primaire physique sera d'imposer à un point de ne pas quitter un cercle ou un plan incliné.

4. Pour plus de détails, consulter la référence [19] page 7.

s'annulent au même temps. Par contre, il est possible de redéfinir les contraintes comme étant $3\phi_1 + \phi_2 = 0$ et $\phi_1 - 2\phi_2 = 0$.

En physique, à part les lagrangiens de la mécanique classique et certain cas en théorie des champs (le lagrangien de Klein-Gordon et le lagrangien de Schrödinger), pratiquement tous les systèmes sont décrits par des lagrangiens qui présentent des singularités dues aux contraintes.

2.2.1-a. Lagrangiens linéaires par rapport à une vitesse

Le meilleur exemple est en théorie quantique des champs, là où la densité lagrangienne $\mathcal{L}$ du champ de Dirac $\psi(t, \vec{x})$ décrivant les particules fermioniques de spin $\frac{1}{2}$ est linéaire par rapport aux vitesses ($\partial_0\psi$ et $\partial_0\overline{\psi}$). En effet,

$$\mathcal{L} = \overline{\psi}\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - m\right)\psi = i\overline{\psi}\gamma^0\partial_0\psi + i\overline{\psi}\gamma^i\partial_i\psi - m\overline{\psi}\psi$$

où les γ^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) sont les quatre matrices de Dirac et $\overline{\psi}(t, x) = \psi^+(t, x)\gamma^0$. Les moments conjugués sont $\Pi_\psi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_0\psi} = i\overline{\psi}\gamma^0$ et $\Pi_{\overline{\psi}} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_0\overline{\psi}} = 0$. Nous sommes bel et bien en présence de deux contraintes $\Pi_\psi - i\overline{\psi}\gamma^0 = 0$ et $\Pi_{\overline{\psi}} = 0$.

Un exemple beaucoup plus simple sera de prendre le lagrangien $L = (z - e^{-y})\,\dot{x} - \frac{x^2}{2}\dot{y} + y\cos(x)\dot{z} - V(x, y, z)$. Trois contraintes primaires surgissent de la définition des moments conjugués $p_x - z + e^{-y} = 0$, $p_y + \frac{x^2}{2} = 0$ et $p_z - y\cos(x) = 0$.

2.2.1-b. Lagrangiens homogènes par rapport aux vitesses

Ce type de lagrangiens $L(q, \dot{q}, t)$ vérifient la condition d'homogénéité

$$L(q, \lambda\dot{q}, t) = \lambda L(q, \dot{q}, t) \qquad\qquad \forall\lambda \in \mathbb{R}.$$

Le lagrangien d'une particule relativiste en est un bon exemple physique. En effet, en relativité restreinte l'action d'une particule libre prend la forme

$$S = -mc\int\sqrt{\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu} = -mc\int\sqrt{\eta_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}}d\tau = -mc\int\sqrt{\eta_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu}d\tau$$

où $x^\mu = (x^0 = ct, x^1 = x, x^3 = y, x^3 = z)$ représente le quadrivecteur position de notre particule, $\eta_{\mu\nu} = (1, -1, -1, -1)$ est la métrique de Minkowski et τ un paramètre réel permettant de paramétriser sa ligne d'univers de telle sorte que $x^\mu = x^\mu(\tau)$. On vérifie aisément que le lagrangien $L = -mc\sqrt{\eta_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu}$ est homogène par rapport aux vitesses $\dot{x}^\mu$

$$L(x^\mu, \lambda\dot{x}^\mu) = -mc\sqrt{\eta_{\mu\nu}\lambda^2\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu} = \lambda L(x^\mu, \dot{x}^\mu).$$

Le passage au formalisme hamiltonien s'accompagne de la contrainte primaire $\eta_{\mu\nu}p^\mu p^\nu = m^2c^2$, ce qui prouve que notre lagrangien est bien singulier. Même chose avec le lagrangien un peu plus simple $L = \frac{1}{2}m\left(\frac{\dot{x}^2}{\dot{z}} + \frac{\dot{y}^2}{\dot{z}}\right) - V(x, y, z)\,\dot{z}$ qui présente la contrainte primaire $p_z + \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2\right) + V = 0$.

2.2.1-c. Lagrangiens avec symétrie de jauge

Il est connu que la densité lagrangienne du champ de Maxwell

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \tag{3.25}$$

est invariante sous la transformation de jauge $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \chi$ où $\chi = \chi(t, \vec{x})$, sachant que $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ et $A_\mu = \left(\frac{V}{c}, \vec{A}\right)$. Ici, V désigne le potentiel scalaire, $\vec{A}$ le potentiel vecteur et c est célérité de la lumière dans le vide. Les moments conjugués définis par $\Pi_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 A_\mu} = F_{\mu 0}$ contiennent la contrainte primaire $\Pi_0 = 0$, preuve de la singularité de notre lagrangien.

Le lagrangien $L = \frac{(\dot{x}-\dot{y})^2}{2} - (x - y)$ lui aussi est un invariant de jauge sous la transformation $\tilde{x} = x + \varepsilon(t)$ et $\tilde{y} = y + \varepsilon(t)$ où $\varepsilon(t)$ est une fonction quelconque dépendant du temps. Il possède effectivement la contrainte primaire $p_x - p_y = 0$.

3.2.2 Passage au formalisme hamiltonien et égalité faible

En présence de contraintes primaires $\phi_m(q, p) = 0$, $(m = 1....M)$, les équations de Hamilton doivent être corrigées de manière à les respecter. Pour ce faire, on construit d'abord le hamiltonien $H_c = p_i\dot{q}_i - L$ qui sera indépendant des vitesses généralisées $\dot{q}$ (voir page 111). Ensuite, on procède par analogie au formalisme lagrangien avec contraintes en remplaçant le hamiltonien canonique H_c par le hamiltonien total H_T donné par

$$H_T(p, q) = H_c(p, q) + \lambda_m \phi_m(q, p) \tag{3.26}$$

où les quantités λ_m seront appelées les multiplicateurs de Dirac [5]. Les équations du mouvement s'obtiennent à l'aide du principe de moindre action ($\delta S = 0$) d'une manière analogue au cas régulier explicité dans la première section de ce chapitre à condition de remplacer H par H_T. En effet,

$$\begin{aligned}
\delta S &= \delta \int_{t_i}^{t_f} [p_i\dot{q}_i - H_T]\, dt = \int_{t_i}^{t_f} \delta\left[(p_i\dot{q}_i - H_c) - \lambda_m\phi_m\right] dt \\
&= \int_{t_i}^{t_f} [\left(\dot{q}_i - \tfrac{\partial H_c}{\partial q_i}\right)\delta p_i - \left(\dot{p}_i + \tfrac{\partial H_c}{\partial p_i}\right)\delta q_i - \delta\lambda_m\phi_m - \lambda_m\tfrac{\partial \phi_m}{\partial q_i}\delta q_i - \lambda_m\tfrac{\partial \phi_m}{\partial p_i}\delta p_i]dt \\
&= \int_{t_i}^{t_f} [\left(-\dot{p}_i - \tfrac{\partial H_c}{\partial q_i} - \lambda_m\tfrac{\partial \phi_m}{\partial q_i}\right)\delta q_i + \left(\dot{q}_i - \tfrac{\partial H_c}{\partial p_i} - \lambda_m\tfrac{\partial \phi_m}{\partial p_i}\right)\delta p_i - \phi_m\delta\lambda_m]dt.
\end{aligned}$$

5. Dans le cas d'un point se déplaçant à deux dimensions librement sur le cercle unité, le hamiltoninien total sera $H_T = \frac{p_x^2}{2} + \frac{p_y^2}{2} + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$.

La dynamique de notre système décrit par le hamiltonien $H_T(p,q)$ résulte de la condition $\delta S = 0$ qui est vérifiée quand

$$\begin{cases} \dot{p}_i = -\frac{\partial H_c}{\partial q_i} - \lambda_m \frac{\partial \phi_m}{\partial q_i} & i = 1...N \\ \dot{q}_i = \frac{\partial H_c}{\partial p_i} + \lambda_m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_i} & i = 1...N \\ \phi_m = 0 & m = 1...M. \end{cases} \tag{3.27}$$

Il s'agit des équations canoniques de Hamilton qui tiennent compte de la présence des contraintes primaires $\phi_m = 0$.

Soit maintenant la fonction $F(q,p)$ définie dans l'espace des phases. A l'aide des équations du mouvement (3.27), on peut déterminer son évolution comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{F} &= \frac{\partial F}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial p_i}\dot{p}_i \\ &= \left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial H_c}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial H_c}{\partial q_i}\right) + \lambda_m \left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial \phi_m}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial \phi_m}{\partial q_i}\right) \quad ; \quad \phi_m = 0 \end{aligned}$$

$$\dot{F} = \{F, H_c\} + \lambda_m \{F, \phi_m\} \quad ; \quad \phi_m = 0. \tag{3.28}$$

où $\{\ ,\ \}$ désigne les crochets de Poisson. Donc, il est possible d'avoir les équations dynamiques à l'aide des crochets de Poisson à condition d'utiliser les contraintes $\phi_m = 0$ une fois que les crochets sont calculés.

Il est commode de réécrire l'équation précédente sous la forme

$$\dot{F} = (\{F, H_c\} + \lambda_m \{F, \phi_m\})|_{\phi_m = 0}. \tag{3.29}$$

Calculons maintenant le crochet $\{F, H_T\}$ où H_T est le hamiltonien total (3.26).

$$\{F, H_T\} = \{F, H_c + \lambda_m \phi_m\} = \{F, H_c\} + \lambda_m \{F, \phi_m\} + \{F, \lambda_m\}\phi_m. \tag{3.30}$$

Le dernier crochet est inconnu, mais si on utilise le fait que les $\phi_m = 0$, il va s'annuler automatiquement d'où on tire la relation

$$\{F, H_T\}|_{\phi_m = 0} = (\{F, H_c\} + \lambda_m \{F, \phi_m\})|_{\phi_m = 0}. \tag{3.31}$$

Par comparaison avec (3.29), on déduit facilement l'équation d'évolution de $F(q,p)$

$$\dot{F} = \{F, H_T\}|_{\phi_m = 0}. \tag{3.32}$$

En particulier, les équations canoniques s'écriront

$$\dot{q}_i = \{q_i, H_T\}|_{\phi_m = 0} \quad ; \quad \dot{p}_i = \{p_i, H_T\}|_{\phi_m = 0}. \tag{3.33}$$

On voit bien que le hamiltonien total H_T joue le même rôle que le hamiltonien canonique H à condition de travailler sur la surface des contraintes ($\phi_m = 0$).

A ce stade, introduisons avec Dirac la notion d'égalité faible : tandis que les égalités fortes (ordinaires "=") sont valables dans tout l'espace des phases, les égalités faibles ("$\approx$")

sont valables seulement sur la surface des contraintes, ce qui veut dire, une fois qu'on a utilisé les relations $\phi_m = 0$. Autrement dit, Si $F(q,p)$ et $G(q,p)$ sont deux fonctions de l'espace des phases, alors [6]

$$F \approx G \quad \Leftrightarrow \quad F|_{\phi_m=0} = G|_{\phi_m=0} \quad \Leftrightarrow \quad F - G = \kappa_m \phi_m \qquad m = 1...M \tag{3.34}$$

où κ_m sont des coefficients définis dans l'espace des phases. On remarque qu'on obtient $F = G$ si on pose $\phi_m = 0$. Comme cas particulier, il est clair que $\phi_m \approx 0, m = 1...M$. Du coup, les équations (3.29) et (3.32) vont s'écrire

$$\dot{F} \approx \{F, H_c\} + \lambda_m \{F, \phi_m\} \qquad \dot{F} \approx \{F, H_T\}. \tag{3.35}$$

Pour être sûr d'avoir les bonnes équations du mouvement, il faut d'abord développer tous les crochets de Poisson, ensuite imposer les contraintes aux résultats. Il s'agit là d'une règle à ne jamais enfreindre avec les égalités faibles. Comme cas particulier de l'équation précédente, les équations de Hamilton auront les expressions

$$\dot{q}_i \approx \{q_i, H_T\} \quad ; \quad \dot{p}_i \approx \{p_i, H_T\} \qquad i = 1...N. \tag{3.36}$$

Nous allons terminer par un exemple d'application résumant tout ce qui a été dit, en examinant le cas du lagrangien $L = e^{-y}\frac{\dot{x}^2}{2} + \sin(x)\dot{y} - V(x,y)$. Les moments conjugués sont $p_x = e^{-y}\dot{x}$ et $p_y = x$, d'où l'existence de la contrainte primaire $\phi_1 = p_y - \sin(x) = 0$. Le hamiltonien canonique est

$$\begin{aligned} H_c &= \dot{x}p_x \ + \dot{y}p_y - \ L = (e^y p_x)\, p_x + \dot{y}p_y - \tfrac{1}{2}e^{-y}\left(e^y p_x\right)^2 - \sin(x)\dot{y} + V(x,y) \\ &= \tfrac{1}{2}e^y p_x^2 + (p_y - \sin(x))\dot{y} + V(x,y) = \tfrac{1}{2}e^y p_x^2 + \phi_1\dot{y} + V(x,y) \end{aligned}$$

$$H_c = \frac{1}{2}e^y p_x^2 + V(x,y).$$

On voit bien que le hamiltonien canonique H_c ne dépend pas des vitesses. Le hamiltonien total sera alors

$$H_T = H_c + \lambda_1\phi_1 = \frac{1}{2}e^y p_x^2 + V(x,y) + \lambda_1(p_y - \sin(x))$$

et les équations de Hamilton

$$\begin{array}{ll} \dot{x} = e^y p_x & \dot{p}_x = -\frac{\partial V}{\partial x} + \lambda_1\cos(x) \\ \dot{y} = \lambda_1 & \dot{p}_y = -\frac{1}{2}e^y p_x^2 - \frac{\partial V}{\partial y} \end{array} \qquad \phi_1 = p_y - \sin(x) = 0.$$

Une petite manipulation montre que ces équations sont équivalentes aux équations

$$(\ddot{x} - \dot{y})\, e^{-y} = -\frac{\partial V}{\partial x} + \cos(x)\dot{y} \qquad \dot{x}\cos(x) = -\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\dot{x}^2}{2}e^{-y}$$

qui ne sont que les équations d'Euler-Lagrange qu'on aurait pu avoir directement à partir du lagrangien de départ, ce qui montre l'équivalence des deux formulations.

6. Pour la démonstration de la dernière égalité, voir la référence [2] page 8.

3.2.3 Algorithme de Dirac-Bergmann et contraintes secondaires

Les contraintes primaires $\phi_{m'} = 0, m' = 1...M$ doivent être vérifiées tout au long de l'évolution du système qui les présente, ce qui revient à dire qu'elles se conservent dans le temps ($\phi_{m'} \approx 0 \Rightarrow \dot{\phi}_{m'} \approx \frac{d\phi_{m'}}{dt} \approx 0$). Remplaçons dans (3.35) afin d'avoir les conditions de consistance qui doivent être respectées par les contraintes primaires.

$$\dot{\phi}_{m'} \approx 0 \quad \Leftrightarrow \quad \{\phi_{m'}, H_c\} + \lambda_m \{\phi_{m'}, \phi_m\} \approx 0 \qquad m' = 1...M. \tag{3.37}$$

Il s'agit d'un système d'équations algébriques non homogène qui va nous permettre d'accéder à plus d'informations sur les multiplicateurs de Dirac $\lambda_m, m = 1...M$. L'étude de ces conditions de consistance va se solder par une des quatre situations suivantes :

1. Les conditions de consistance vont nous conduire au moins à une équation fondamentalement fausse du type $1 = 0$, comme c'est le cas du lagrangien $L = x - \alpha\dot{x}$ qui est inconsistant. En effet, l'équation d'Euler-Lagrange $\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \Longrightarrow 1 = 0$. Nous somme en présence d'une seule contrainte primaire $\phi_1 = p_x + \alpha \approx 0$ et le hamiltonien canonique est $H_c = -x$. La condition de consistance sera

$$\dot{\phi}_1 = 0 \Rightarrow \{\phi_1, H_c\} + \lambda_1 \{\phi_1, \phi_1\} \approx 0 \Rightarrow 1 \approx 0.$$

On voit bien apparaître une anomalie et il ne faut pas essayer d'aller plus loin avant de modifier notre lagrangien, car notre action n'admet pas d'extremum.

2. Les conditions de consistance permettront de fixer toutes les valeurs des multiplicateurs $\lambda_m, m = 1...M$ et notre procédure s'arrêtera aussi. Le lagrangien $L = e^{-y}\dot{x} - \cos(x)\dot{y} - xy$ par exemple a deux contraintes primaires $\phi_1 = p_x - e^{-y} \approx 0$ et $\phi_2 = p_y + \cos(x) \approx 0$. Le hamiltonien canonique dans ce cas est

$$H_c = \dot{x}p_x + \dot{y}p_y - e^{-y}\dot{x} + \cos(x)\dot{y} + xy = \dot{x}(p_x - e^{-y}) + \dot{y}(p_y + \cos(x)) + xy = xy.$$

Les conditions $\dot{\phi}_1 \approx 0$ et $\dot{\phi}_2 \approx 0$ vont se traduire par les relations

$$\{\phi_1, H_c\} + \lambda_1 \{\phi_1, \phi_1\} + \lambda_2 \{\phi_1, \phi_2\} \approx 0 \Rightarrow \lambda_2 \approx \frac{y}{e^{-y} + \sin(x)}$$

$$\{\phi_2, H_c\} + \lambda_1 \{\phi_2, \phi_1\} + \lambda_2 \{\phi_2, \phi_2\} \approx 0 \Rightarrow \lambda_1 \approx -\frac{x}{e^{-y} + \sin(x)}.$$

Il est maintenant possible d'utiliser les contraintes afin d'écrire $\lambda_1 \approx -\frac{x}{p_x + \sin(x)}$ et $\lambda_2 \approx \frac{y}{p_x + \sin(x)}$, car on vient de terminer avec les crochets de Poisson.

3. Il se peut que les conditions de consistance débouchent sur des équations qui ne contiennent pas de contradictions mais permettent seulement de déterminer quelque paramètres λ_m (pas tous), ce qui va aussi mettre fin à la procédure. Dans le cas du lagrangien $L = 2xy\dot{x} + x^2\dot{y} + w\dot{z} - \frac{w^2}{2}$ qui présente quatre contraintes primaires $\phi_1 = p_x - 2xy \approx 0$, $\phi_2 = p_y - x^2 \approx 0$, $\phi_3 = p_z - w \approx 0$ et $\phi_4 = p_w \approx 0$, le hamiltonien canonique sera $H_c = \frac{w^2}{2}$ et le hamiltonien total aura l'expression

$$H_T = w^2/2 + \lambda_1 (p_x - 2xy) + \lambda_2 \left(p_y - x^2\right) + \lambda_3(p_z - w) + \lambda_4 p_w.$$

Appliquons les conditions de consistance $\dot{\phi}_m \approx 0, m = 1...4$ aux contraintes ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 et ϕ_4.

$$\dot{\phi}_1 \approx 0 \Rightarrow \{\phi_1, H_T\} \approx 0 \Rightarrow 0 \approx 0$$
$$\dot{\phi}_2 \approx 0 \Rightarrow \{\phi_2, H_T\} \approx 0 \Rightarrow 0 \approx 0$$
$$\dot{\phi}_3 \approx 0 \Rightarrow \{\phi_3, H_T\} \approx 0 \Rightarrow -\lambda_4 \approx 0 \Rightarrow \lambda_4 \approx 0$$
$$\dot{\phi}_4 \approx 0 \Rightarrow \{\phi_4, H_T\} \approx 0 \Rightarrow -w + \lambda_3 \approx 0 \Rightarrow \lambda_3 \approx w.$$

Dans cette situation les multiplicateurs λ_1 et λ_2 sont quelconques et ne peuvent pas être fixés par les conditions de consistance.

4. Les conditions de consistance peuvent donner naissance à des nouvelles relations $\chi_k(q,p) \approx 0, k = 1...K_1$ liant les moments conjugués et des positions sans faire intervenir les multiplicateurs λ_m et indépendamment des contraintes primaires ϕ_m. Il s'agit là de contraintes secondaires qui diffèrent des contraintes primaires par le fait qu'elles ont un caractère dynamique qui résulte de l'utilisation des équations de conservation $\dot{\phi}_m \approx 0$, tandis que les contraintes primaires sont des conséquences de la définition des moments conjugués $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$.

Les contraintes secondaires $\chi_k(q,p) \approx 0$ doivent aussi être préservées dans le temps $\dot{\chi}_k(q,p) \approx 0$. Pour ce faire, utilisons l'équation (3.35), ce qui va donner naissance aux conditions de consistance ci-dessous, conditions que les contraintes secondaires doivent satisfaire à leur tour.

$$\dot{\chi}_k \approx 0 \quad \Rightarrow \quad \{\chi_k, H_c\} + \lambda_m \{\chi_k, \phi_m\} \approx 0 \qquad k = 1...K_1. \tag{3.38}$$

Ces conditions prises avec les conditions (3.37) vont constituer les nouvelles conditions de consistance dont l'analyse va nous conduire à nouveau vers l'une des quatre situations précédentes. Ce qui veut dire qu'on peut tomber sur K_2 nouvelles contraintes secondaires (quatrième cas) qui vont donner lieu à de nouvelles conditions de consistance qu'il faut prendre en considération. On va continuer ainsi jusqu'à l'épuisement de toutes les conditions de consistance et la détermination de toutes les contraintes secondaires avec un certain nombre de multiplicateurs λ_m . Ce processus est appelé l'algorithme de Dirac- Bergmann.

Pour illustrer ce qui vient d'être dit, choisissons par exemple le lagrangien $L = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + x\dot{y} + \cos(z)\dot{z} - \frac{xy^2}{2}$. La définition des moments conjugués va s'accompagner des deux contraintes primaires $\phi_1 = x - p_y \approx 0$ et $\phi_2 = \cos(z) - p_z \approx 0$. Avec ces contraintes, le hamiltonien canonique sera $H_c = \frac{p_x^2}{2} + \frac{xy^2}{2}$, d'où le hamiltonien total

$$H_T = p_x^2/2 + xy^2/2 + \lambda_1(x - p_y) + \lambda_2(\cos(z) - p_z).$$

Utilisons maintenant les conditions de consistance

$$\dot{\phi}_1 \approx 0 \Rightarrow \{\phi_1, H_c\} + \lambda_2\{\phi_1, \phi_2\} \approx 0 \Rightarrow p_x + x \approx 0$$
$$\dot{\phi}_2 \approx 0 \Rightarrow \{\phi_2, H_c\} + \lambda_1\{\phi_2, \phi_1\} \approx 0 \Rightarrow 0 \approx 0.$$

On voit apparaître une contrainte secondaire $\chi_1 = p_x + x \approx 0$, d'où la condition supplémentaire

$$\dot{\chi}_1 \approx 0 \Rightarrow \{\chi_1, H_c\} + \lambda_1\{\chi_1, \phi_1\} + \lambda_2\{\chi_1, \phi_2\} \approx 0 \Rightarrow \lambda_1 \approx -y + p_x$$

La procédure se termine ici car il n'y a pas de nouvelles contraintes. On a pu fixer $\lambda_1 \approx -y + p_x$ mais λ_2 peut prendre n'importe quelle valeur et les conditions de consistance resteront satisfaites. La solution générale s'écrit alors

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -y + p_x \\ v \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -y + p_x \\ 0 \end{bmatrix} + v \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

où v est une fonction quelconque des coordonnées et des moments conjugués et qui peut dépendre aussi du temps ($v = v(q, p, t)$).

Avec un lagrangien consistant, l'algorithme de Dirac-Bergmann se solde par la détermination de toutes les contraintes secondaires $\chi_k(q, p) \approx 0, k = 1...K$, en plus des M contraintes primaires $\phi_m \approx 0$. Puisque ces contraintes secondaires seront traitées presque sans distinctions avec les contraintes primaires, il convient de les noter par commodité

$$\phi_k \approx 0 \qquad k = M + 1...K + M \tag{3.39}$$

L'ensemble de toutes les contraintes dont le nombre est $J = K + M$ sera désigné alors par

$$\phi_j \approx 0 \qquad j = 1...J \tag{3.40}$$

et elles vont définir les conditions de consistance

$$\{\phi_j, H_c\} + \lambda_m \{\phi_j, \phi_m\} \approx 0 \qquad m = 1...M \; ; \; j = 1...J. \tag{3.41}$$

On obtient ainsi un système de J équations algébriques linéaires non homogènes avec M inconnues λ_m dont la solution générale s'écrit sous la forme

$$\lambda_m = \Lambda_m (p, q) + V_m (p, q) \qquad m = 1...M \tag{3.42}$$

où Λ_m est une solution particulière et V_m la solution générale du système homogène

$$V_m \{\phi_j, \phi_m\} = 0 \qquad m = 1...M. \tag{3.43}$$

En principe, $V_m = v_a V_{am} (p, q)$ où $V_a (p, q) , a = 1...A$ représentent A vecteurs indépendants avec M composantes, et v_a des coefficients arbitraires qui peuvent dépendre des coordonnées, des moments conjugués et du temps. Autrement dit, la solution générale du système (3.41) est

$$\lambda_m = \Lambda_m (p, q) + v_a V_{am} (p, q) . \tag{3.44}$$

Remplaçons ce résultat dans l'expression du hamiltonien total $H_T = H_c + \lambda_m \phi_m$

$$H_T = H_c + \Lambda_m \phi_m + v_a V_{am} \phi_m = H' + v_a \phi_a \tag{3.45}$$

où

$$H' = H_c + \Lambda_m \phi_m \qquad \phi_a = V_{am} \phi_m \qquad m = 1...M \; ; \; a = 1...A. \tag{3.46}$$

Les $\phi_a = V_{am}\phi_m, a = 1...A$ sont des combinaisons linéaires de contraintes primaires ϕ_m, donc elles sont aussi des contraintes primaires. A l'aide de (3.35), on déduit que la variation dans le temps de toute fonction $F(q,p)$ définie dans l'espace des phases va obéir à l'équation

$$\dot{F} \approx \{F, H'\} + v_a\{F, \phi_a\}\,. \tag{3.47}$$

En particulier, les équations du mouvement peuvent s'écrire

$$\dot{q}_i \approx \{q_i, H'\} + v_a\{q_i, \phi_a\} \qquad i = 1...N \tag{3.48}$$

$$\dot{p}_i \approx \{p_i, H'\} + v_a\{p_i, \phi_a\} \qquad i = 1...N. \tag{3.49}$$

Deux cas ce distinguent : le premier, lorsque les vecteurs $V_a(p,q), a = 1...A$ sont tous nuls et avec eux les $\phi_a = 0$, ce qui va se traduire par des équations du mouvement bien déterminées. Le deuxième correspond au cas contraire, et les équations du mouvement vont dépendre de coefficients complètement arbitraires $v_a(q,p,t), a = 1...A$.

3.2.4 Contraintes de première et de deuxième classe

Revenons maintenant aux conditions de consistance que doivent vérifier les contraintes primaires et secondaires $\phi_j, j = 1...J$

$$\{\phi_j, H_c\} + \lambda_m\{\phi_j, \phi_m\} \approx 0 \qquad m = 1...M \quad j = 1...J. \tag{3.50}$$

où $J = M + K$ sachant que M est le nombre de contraintes primaires et K celui des contrainte secondaires. Remarquons que si pour un certain indice j' on a les crochets $\{\phi_{j'}, \phi_m\} \approx 0$, l'équation ci-dessus se réduira à la forme simple

$$\{\phi_{j'}, H_c\} \approx 0 \tag{3.51}$$

et on perd complètement tous les multiplicateurs λ_m, ce qui veut dire que cette équation n'impose pas de conditions sur ces multiplicateurs. Pour cette raison, on fait une distinction fondamentale entre les contraintes dites de première classe et les contraintes de seconde classe. Selon Dirac, on dit qu'une fonction $F(q,p)$ est de première classe si son crochet de Poisson avec chacune des contraintes primaires et secondaires $\phi_j, j = 1...J$ est nul sur la surface des contraintes. Autrement dit,

$$\{F, \phi_j\} \approx 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \{F, \phi_j\} = \kappa_{jj'}\phi_{j'} \tag{3.52}$$

où les coefficients $\kappa_{jj'} = \kappa_{jj'}(q,p)$ sont des fonctions de q et p. Si par contre la fonction $F(q,p)$ n'est pas de première classe, elle est dite automatiquement de deuxième classe ($\{F, \phi_j\} \not\approx 0$ du moins pour un seul j). Le hamiltonien total H_T par exemple est de première classe par construction car les relations de consistance (3.50) s'écrivent aussi sous la forme

$$\{\phi_j, H_T\} \approx 0 \qquad \forall j = 1...J. \tag{3.53}$$

Dans un cas particulier, une contrainte $\phi_{j'}$ (primaire ou secondaire) est appelée contrainte de première classe si ses crochets de Poisson avec les autres contraintes sont faiblement égals à zéro

$$\{\phi_{j'}, \phi_j\} \approx 0 \qquad \forall j = 1...J. \tag{3.54}$$

Il faut savoir qu'une contrainte primaire peut être de deuxième classe comme une contrainte secondaire peut être de première classe ; les deux classifications n'ont rien à avoir l'une avec l'autre. Il est intéressant de savoir que $\forall j = 1...J$, la $\left(\phi_j\right)^2$ est de première classe.

Dans le cas du lagrangien $L = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + x\dot{y} + \cos(z)\dot{z} - xy$, nous avons deux contraintes primaires $\phi_1 = x - p_y \approx 0$ et $\phi_2 = \cos(z) - p_z$ et une contrainte secondaire $\phi_3 = x + p_x$. La contrainte ϕ_2 est de première classe car $\{\phi_2, \phi_1\} = 0 \approx 0$ et $\{\phi_2, \phi_3\} = 0 \approx 0$ tandis que les contraintes ϕ_1 et ϕ_3 sont de deuxième classe vu que $\{\phi_1, \phi_3\} = 1 \not\approx 0$.

Avant de terminer cette sous-section, il très utile de vérifier que le hamiltonien H' et les contraintes primaires $\phi_a, a = 1...A$ donnés par l'équation (3.46) sont de première classe. En effet, on a vu que $\{H_c, \phi_j\} + \Lambda_m \{\phi_m, \phi_j\} \approx 0$ et que $V_{am} \{\phi_m, \phi_j\} \approx 0$, ce qui va se traduire par

$$\begin{aligned} \{H', \phi_j\} &= \{H_c + \Lambda_m\phi_m, \phi_j\} = \{H_c, \phi_j\} + \{\Lambda_m\phi_m, \phi_j\} \\ &= \{H_c, \phi_j\} + \Lambda_m \{\phi_m, \phi_j\} + \{\Lambda_m, \phi_j\} \phi_m \\ &\approx 0 + \{\Lambda_m, \phi_j\} \phi_m \approx 0 \qquad \forall j = 1...J \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \{\phi_a, \phi_j\} &= \{V_{am}\phi_m, \phi_j\} = V_{am} \{\phi_m, \phi_j\} + \{V_{am}, \phi_j\} \phi_m \\ &\approx 0 + \{V_{am}, \phi_j\} \phi_m \approx 0 \qquad \forall j = 1...J. \end{aligned}$$

De la même manière, il est aussi possible de démontrer facilement en utilisant la règle de Leibniz et l'identité de Jacobi, que le crochet de Poisson de deux quantités $F(q, p)$ et $G(q, p)$ de première classe est une quantité de première classe.

3.2.5 Contraintes de première classe comme générateurs de symétrie de jauge

Comme le montre l'équation (3.35), l'évolution d'une grandeur $F = F(q, p)$, définie dans l'espace des phases, est gouvernée par l'équation

$$\dot{F} \approx \{F, H'\} + v_a\{F, \phi_a\} \tag{3.55}$$

où les $v_a(q, p, t), a = 1...A$ sont des coefficients arbitraires qui peuvent dépendre du temps et les $\phi_a, a = 1...A$ sont des contraintes primaires de première classe comme on vient de le voir dans la sous-section précédente. Plaçons nous dans le cas où les contraintes ϕ_a ne sont pas toutes nulles et supposons que nous connaissons les conditions initiales q_0 et p_0 à l'instant t_0, ce qui veut dire que $F_0 = F(q_0, p_0)$. A un instant ultérieur $t_0 + \delta t$ très proche du premier ($\delta t \simeq 0$), Notre grandeur F va subir la variation

$$F(t_0 + \delta t) = F_0 + \dot{F}\delta t \tag{3.56}$$

$$F \approx F_0 + \{F, H'\}\,\delta t + v_a\,\{F, \phi_a\}\,\delta t. \tag{3.57}$$

Comme les coefficients $v_a(q,p,t), a = 1...A$ sont complètement arbitraires, on peut les choisir autrement. C'est à dire avec les coefficients $v'_a, a = 1...A$, on aura

$$F'(t_0 + \delta t) = F_0 + \{F, H'\}\,\delta t + v'_a\,\{F, \phi_a\}\,\delta t \tag{3.58}$$

ce qui nous donne la différence

$$\delta F = F' - F = \delta t(v'_a - v_a)\,\{F, \phi_a\}\,. \tag{3.59}$$

Posons $\varepsilon_a(t) = \delta t(v'_a - v_a), a = 1...A$ pour avoir la forme

$$\delta F = F' - F \quad \Rightarrow \quad \delta F = \varepsilon_a(t)\,\{F, \phi_a\}\,. \tag{3.60}$$

Les $\varepsilon_a(t), a = 1...A$ sont des fonctions infinitésimales car δt est infinitésimal et arbitraires car v'_a et v_a le sont aussi. Donc la connaissance des conditions initiales n'est pas suffisante pour déterminer l'état ultérieur de notre système à cause de la présence des coefficients $v_a, a = 1...A$ complètement arbitraires. Cela veut dire, que la solution générale des équations du mouvement va contenir des fonctions arbitraires, ce qui est une propriété fondamentale des théories de jauge. En plus, l'équation (3.60) montre que la transformation de jauge infinitésimale est générée par les contraintes $\phi_a, a = 1...A$ qui sont des contraintes primaires de première classe.

Dirac va plus loin en postulant que les contraintes secondaires de première classe vont générer elles aussi des transformations de jauge qui laissent invariant l'état du système étudié, ce qui est connu sous le nom de "conjecture de Dirac". Il a même défini un hamiltonien étendu H_E qui est égal au hamiltonien total plus les contraintes secondaires de premières classe ϕ_b multipliées par des coefficients arbitraires $\tilde{v}_b(q,p,t)$ ($H_E = H_T + \tilde{v}_b\phi_b$) afin de prendre ces dernières en considération. Mais à vrai dire, ce postulat qui fonctionne presque tout le temps n'est pas juste, car on trouve dans la littérature des contre-exemples qui le contredisent [7].

Afin de bien illustrer ces résultats, considérons d'abord le lagrangien $L = \frac{(y\dot{x}+x\dot{y})^2}{2} - xy$ ayant une seule contrainte primaire $\phi = xp_x - yp_y$ car

$$\begin{array}{l} p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = y\,(y\dot{x} + x\dot{y}) \\ p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = x\,(y\dot{x} + x\dot{y}) \end{array} \quad \Rightarrow \quad xp_x - yp_y = 0. \tag{I}$$

La condition de consistance $\dot{\phi} \approx 0$ va se solder par la relation $0 \approx 0$, ce qui montre que $\phi = xp_x - yp_y$ est la seule contrainte de notre lagrangien et qu'elle est une contrainte de première classe. D'après Dirac, elle va générer une transformation de jauge infinitésimale à l'aide de la relation

$$\delta F = \varepsilon(t)\,\{F, \phi_1\} = \varepsilon(t)\,\{F, xp_x - yp_y\}$$

7. Pour plus d'analyse et de discussion voir les référence [1] et [2] page 21 et page 17 respectivement.

où F est une fonction définie dans l'espace des phases et $\varepsilon(t)$ une fonction arbitraire qui dépend du temps. En particulier,

$$\delta x = \varepsilon(t)x \qquad \delta y = -\varepsilon(t)y \qquad \delta p_x = -\varepsilon(t)p_x \qquad \delta p_y = \varepsilon(t)p_y \tag{3.61}$$

d'où l'on en déduit que

$$y\delta x + x\delta y = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \dot{y}\delta x + y\delta\dot{x} + \dot{x}\delta y + x\delta\dot{y} = 0. \tag{II}$$

Le lagrangien du départ $L = \frac{(y\dot{x}+x\dot{y})^2}{2} - xy$ va alors subir la transformation

$$\delta L = (y\dot{x} + x\dot{y})\,(\dot{y}\delta x + y\delta\dot{x} + \dot{y}\delta x + x\delta\dot{y}) - (y\delta x + x\delta y)$$

et en utilisant (II), on obtient

$$\delta L = 0.$$

Il clair que ce lagrangien est invariant de jauge sous la transformation générée par la contrainte primaire de première classe $\phi_1 = xp_x - yp_y$.

Dans un deuxième temps, prenons le lagrangien $L = (\dot{x} - z)(\dot{y} - x)$. Par définition, les moments conjugués sont

$$p_x = \dot{y} - x \qquad p_y = \dot{x} - z \qquad p_z = 0$$

ce qui donne naissance à la contrainte primaire $\phi_1 = p_z \approx 0$. Sachant qu'à partir des relations précédentes $\dot{y} = p_x + x$ et $\dot{x} = p_y + z$, le hamiltonien canonique aura la forme $H_c = p_xp_y + zp_x + xp_y$. La condition de consistance pour la contrainte primaire $\phi_1 = p_z$ est $\{\phi_1, H_c\} + \lambda_1\{\phi_1, \phi_1\} \approx 0 \Rightarrow p_x \approx 0$. La condition de consistance pour la contrainte secondaire $\chi_1 = p_x$ est $\{\chi_1, H_c\} + \lambda_1\{\chi_1, \phi_1\} \approx 0 \Rightarrow p_y \approx 0$. La condition de consistance pour la deuxième contrainte secondaire $\chi_2 = p_y$ est $\{\chi_2, H_c\} + \lambda_1\{\chi_2, \phi_1\} \approx 0 \Rightarrow 0 \approx 0$, ce qui achève le processus. Ces contraintes sont toutes de première classe vu que

$$\{\chi_1, \phi_1\} = \{\chi_2, \phi_1\} = \{\chi_1, \chi_2\} = 0.$$

D'après Dirac, ces contraintes vont générer la transformation de jauge infinitésimale

$$\delta F = \varepsilon_1(t)\{F, \phi_1\} + \varepsilon_2(t)\{F, \chi_1\} + \varepsilon_3(t)\{F, \chi_2\}$$

où F est une fonction définie dans l'espace des phases et $\varepsilon_1(t)$, $\varepsilon_2(t)$ et $\varepsilon_3(t)$ des fonctions arbitraires qui dépendent du temps. En particulier,

$$\delta x = \varepsilon_2(t) \qquad \delta y = \varepsilon_3(t) \qquad \delta z = \varepsilon_1(t) \qquad \delta p_x = 0 \qquad \delta p_y = 0 \qquad \delta p_z = 0.$$

mais comme $p_x = \dot{y} - x$, $p_y = \dot{x} - z$ et $p_z = 0$, on en déduit

$$\delta p_x = \delta\dot{y} - \delta x \qquad \delta p_y = \delta\dot{x} - \delta z \qquad \delta p_z = 0.$$

En utilisant les deux relations précédentes, on obtient

$$0 = \dot{\varepsilon}_3(t) - \varepsilon_2(t) \quad 0 = \dot{\varepsilon}_2(t) - \varepsilon_1(t) \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_1(t) = \ddot{\varepsilon}_3(t) \qquad \varepsilon_2(t) = \dot{\varepsilon}_3(t)$$

et finalement, on aura

$$\delta x = \dot{\varepsilon}_3(t) \quad \delta y = \varepsilon_3(t) \quad \delta z = \ddot{\varepsilon}_3(t).$$

Le lagrangien $L = (\dot{x} - z)(\dot{y} - x)$ va subir la variation

$$\begin{aligned}\delta L &= (\delta\dot{x} - \delta z)(\dot{y} - x) + (\dot{x} - z)(\delta\dot{y} - \delta x) \\ &= (\ddot{\varepsilon}_3(t) - \ddot{\varepsilon}_3(t))(\dot{y} - x) + (\dot{x} - z)(\dot{\varepsilon}_3(t) - \dot{\varepsilon}_3(t)) = 0.\end{aligned}$$

Notre lagrangien est effectivement un invariant de jauge sous la transformation générée par les contraintes de première classe (primaires et secondaires). Le hamiltonien étendu sera alors $H_E = H_T + \tilde{v}_1\chi_1 + \tilde{v}_2\chi_2$ où les coefficients $\tilde{v}_1(q,p,t)$ et $\tilde{v}_2(q,p,t)$ sont complètement arbitraires.

3.2.6 Contraintes de deuxième classe comme origine du crochet de Dirac

Les contraintes de première classe génèrent des transformations de jauge, qu'en est-il des contraintes de deuxième classe ? Dans ce qui suit, on va supposer que toutes les contraintes de notre système (primaires et secondaires) sont de deuxième classe et les notera $\xi_r, r = 1...R$, où les $\xi_m, m = 1...M$ dénotent les contraintes primaires et les $\xi_k, k = M+1...R = J$ désignent les contraintes secondaires. On peut alors écrire les conditions de consistance sous la forme

$$\{\xi_r, H_T\} \approx \{\xi_r, H_c\} + \lambda_m \{\xi_r, \xi_m\} \approx 0 \qquad m = 1...M \text{ et } r = 1...R. \tag{3.62}$$

Il ne faut pas oublier que seules les contraintes primaires figurent dans l'expression du hamiltonien total

$$H_T = H_c + \lambda_m \xi_m \qquad m = 1...M. \tag{3.63}$$

Ecrivons maintenant (3.62) sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \{\xi_1,\xi_1\} & \cdots & \{\xi_1,\xi_M\} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \{\xi_R,\xi_1\} & \cdots & \{\xi_R,\xi_M\} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \lambda_M \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -\{\xi_1, H_c\} \\ -\{\xi_2, H_c\} \\ \vdots \\ \vdots \\ -\{\xi_R, H_c\} \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad [\Omega]\overrightarrow{\lambda} \approx \overrightarrow{\eta} \tag{3.64}$$

où

$$\overrightarrow{\lambda} = [\lambda_1\lambda_2...\lambda_M]^t \qquad \overrightarrow{\eta} = [-\{\xi_1, H_c\} ... - \{\xi_R, H_c\}]^t. \tag{3.65}$$

Donc $[\Omega]$ est une matrice avec R lignes et M colonnes. Introduisons la matrice carrée antisymétrique $\Delta = [\{\xi_r, \xi_{r'}\}]_{r,r'=1...R}$ qui est construite avec toutes les contraintes de deuxième classe et qui contient la matrice Ω comme bloc,

$$\Delta = \begin{bmatrix} \{\xi_1,\xi_1\} & \cdots & \{\xi_1,\xi_M\} & \{\xi_1,\xi_{M+1}\} & \cdots & \{\xi_1,\xi_R\} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \{\xi_R,\xi_1\} & \cdots & \{\xi_R,\xi_M\} & \{\xi_R,\xi_{M+1}\} & \cdots & \{\xi_R,\xi_R\} \end{bmatrix} = [\Omega\ \omega] \tag{3.66}$$

où le bloc ω est une matrice avec R lignes et $R-M$ colonnes. Il est possible de démontrer comme l'a fait Dirac, [8] que si toutes les contraintes sont de deuxième classe, le déterminant $\det(\Delta) \not\approx 0 \Rightarrow \det(\Delta) \neq 0$. Comme notre matrice Δ est antisymétrique et son déterminant est non nul, elle doit être de dimension paire, car le déterminant d'une matrice antisymétrique impaire A est nul. Cela veut dire que le nombre de contraintes de deuxième classe d'un système singulier est pair. La matrice inverse de Δ notée Δ^{-1} vérifie la relation

$$\Delta_{rr'}\Delta^{-1}_{r'r''} = \delta_{rr''} \qquad r, r', r'' = 1...R. \tag{3.67}$$

A présent, soit le vecteur-colonne à R composantes

$$\overrightarrow{\theta} = [\lambda_1\ \lambda_2\ ...\lambda_M\ \underbrace{0\ ...\ 0}_{R-M\ \text{zéro}}]^t = [\overrightarrow{\lambda}\ \overrightarrow{0}]^t = \begin{bmatrix} \overrightarrow{\lambda} \\ \overrightarrow{0} \end{bmatrix}. \tag{3.68}$$

Calculons le produit matriciel $\Delta\ \overrightarrow{\theta}$ par bloc

$$\Delta\overrightarrow{\theta} = [\Omega\ \omega] \begin{bmatrix} \overrightarrow{\lambda} \\ \overrightarrow{0} \end{bmatrix} = [\Omega]\overrightarrow{\lambda} \tag{3.69}$$

ensuite par comparaison avec (3.64), on aura l'équtaion

$$\Delta\overrightarrow{\theta} \approx \overrightarrow{\eta}. \tag{3.70}$$

Utilisons le fait que la matrice Δ est inversible afin d'arriver aux relations

$$\overrightarrow{\theta} \approx \Delta^{-1}\overrightarrow{\eta} \quad \Leftrightarrow \quad \theta_r \approx \Delta^{-1}_{rr'}\eta_{r'} \qquad r, r' = 1...R \tag{3.71}$$

mais comme $\overrightarrow{\theta} = [\overrightarrow{\lambda}\ \overrightarrow{0}]^t = [\lambda_1\ \lambda_2\ ...\lambda_M\ \underbrace{0\ ...\ 0}_{R-M\ \text{zéro}}]^t$, cela va se traduire explicitement par

$$\begin{array}{ll} \theta_m = \lambda_m \approx \Delta^{-1}_{mr'}\eta_{r'} & m = 1...M,\ r' = 1...R \\ \theta_r = 0 \approx \Delta^{-1}_{rr'}\eta_{r'} & r = M+1...R,\ r' = 1...R. \end{array} \tag{3.72}$$

Comme les éléments de matrice Δ sont les crochets $\{\xi_r, \xi_{r'}\}$, $r, r' = 1...R$, on va désigner les éléments de sa matrice inverse Δ^{-1}par $\{\xi_r, \xi_{r'}\}^{-1}$, $r, r' = 1...R$, ce qui revient à écrire

$$\Delta_{rr'} = \{\xi_r, \xi_{r'}\} \qquad \Delta^{-1}_{rr'} = \{\xi_r, \xi_{r'}\}^{-1} \qquad r, r' = 1...R. \tag{3.73}$$

8. Consulter la référence [11] page 39 pour la démonstration.

A l'aide (3.65) et (4.29), on aura finalement les expressions des multiplicateurs $\lambda_m, m = 1...M$.

$$\begin{array}{ll} \lambda_m \approx -\left\{\xi_m, \xi_{r'}\right\}^{-1}\left\{\xi_{r'}, H_c\right\} & m = 1...M,\ r' = 1...R \\ 0 \approx -\left\{\xi_r, \xi_{r'}\right\}^{-1}\left\{\xi_{r'}, H_c\right\} & r = M+1...R,\ r' = 1...R. \end{array} \tag{3.74}$$

L'équation d'évolution d'une grandeur $F(q,p)$ est donnée par $\dot{F} \approx \{F, H_c\} + \lambda_m \{F, \xi_m\}$. Avec les nouvelles valeurs des multiplicateurs λ_m, on peut réécrire les choses sous la forme

$$\dot{F} \approx \{F, H_c\} - \{F, \xi_m\}\left\{\xi_m, \xi_{r'}\right\}^{-1}\left\{\xi_{r'}, H_c\right\} \qquad m = 1...M \text{ et } r' = 1...R. \tag{3.75}$$

Puisque d'après (3.74), $-\left\{\xi_r, \xi_{r'}\right\}^{-1}\left\{\xi_{r'}, H_c\right\} \approx 0$ pour $r = M+1...R$, rien ne va changer si on écrit

$$\dot{F} \approx \{F, H_c\} - \{F, \xi_r\}\left\{\xi_r, \xi_{r'}\right\}^{-1}\left\{\xi_{r'}, H_c\right\} \qquad r, r' = 1...R. \tag{3.76}$$

En posant

$$\{F, H_c\}_D = \{F, H_c\} - \{F, \xi_r\}\left\{\xi_r, \xi_{r'}\right\}^{-1}\left\{\xi_{r'}, H_c\right\} \tag{3.77}$$

l'équation précédente va avoir la forme réduite

$$\dot{F} \approx \{F, H_c\}_D . \tag{3.78}$$

Nous avons ainsi défini le crochet de Dirac $\{F, H_c\}_D$ de F et H_c. La généralisation est immédiate au cas de deux fonctions f et g de l'espace des phases dont le crochet de Dirac est donné par

$$\{f, g\}_D = \{f, g\} - \{f, \xi_r\}\left\{\xi_r, \xi_{r'}\right\}^{-1}\left\{\xi_{r'}, g\right\}. \tag{3.79}$$

Sachant que toutes les contraintes $\xi_r, r = 1...R$ doivent satisfaire les conditions de consistance $\{\xi_r, H_T\} \approx 0$, il est facile d'obtenir la propriété

$$\begin{aligned} \{F, H_T\}_D &= \{F, H_T\} - \{F, \xi_r\}\left\{\xi_r, \xi_{r'}\right\}^{-1}\left\{\xi_{r'}, H_T\right\}_{\approx 0} \\ \{F, H_T\}_D &\approx \{F, H_T\} \approx \dot{F}. \end{aligned} \tag{3.80}$$

En particulier, les équations de Hamilton peuvent alors se mettre sous la forme condensée

$$\dot{q}_i \approx \{q_i, H_c\}_D \quad ; \quad \dot{p}_i \approx \{p_i, H_c\}_D \qquad i = 1...N \tag{3.81}$$

ce qui nous rappelle les équations de Hamilton écrites à l'aide des crochets de Poisson dans le cas régulier. Il ne faut pas perdre de vue que ces équations sont écrites en terme d'égalités faibles, ce qui signifie qu'elles s'appliquent sur la surface des contraintes là où les $\xi_r = 0, r = 1...R$.

Le crochet de Dirac a les mêmes propriétés que le crochet de Poisson en plus de quelques autres. Autrement dit, si α et β sont deux réels, f, g et h trois fonctions qui dépendent de q et p, alors

$\{f, g\}_D = -\{g, f\}_D \quad \Rightarrow \quad \{f, f\}_D = 0$	(Antisymétrie)
$\{\alpha f + \beta g, h\}_D = \alpha\{f, h\}_D + \beta\{g, h\}_D$	(Linéarité)
$\{fg, h\}_D = f\{g, h\}_D + \{f, h\}_D g$	(Règle de Leibniz)
$\{f, \{g, h\}\}_D + \{h, \{f, g\}\}_D + \{g, \{h, f\}\}_D = 0$	(Identité de Jacobi)
$\{f, \xi_r\}_D = 0$	(ξ_r contrainte de deuxième classe)
$\{f, G\}_D \approx \{f, G\}$	(G fonction de première classe)

Essayons de vérifier les deux dernières propriétés.

1. La cinquième propriété :

$$\begin{aligned}\{f,\xi_{r''}\}_D &= \{f,\xi_{r''}\} - \{f,\xi_r\}\{\xi_r,\xi_{r'}\}^{-1}\{\xi_{r'},\xi_{r''}\} \\ &= \{f,\xi_{r''}\} - \{f,\xi_r\}\delta_{rr''} = \{f,\xi_{r''}\} - \{f,\xi_{r''}\} = 0.\end{aligned}$$

Cette propriété montre que les crochets de Dirac sont compatibles avec les contraintes de deuxième classe $\xi_r, r = 1...R$ et qu'on peut les remplacer (ces contraintes) directement par zéro dans ces crochets quand elles y figurent avant même de les calculer.

2. La sixième propriété (voir (3.52)) :

$$\{f,G\}_D = \{f,G\} - \{f,\xi_r\}\{\xi_r,\xi_{r'}\}^{-1}\{\xi_{r'},G\}_{\approx 0} \approx \{f,G\}.$$

Cela veut dire que sur la surface des contraintes, les crochets de Dirac contenant des fonctions de première classe se réduisent aux crochets de Poisson.

Nous allons terminer cette sous-section par l'exemple du lagrangien $L = \frac{\dot{x}^2}{2} + x\dot{y} - xy$, qui a une contrainte primaire $\phi_1 = p_y - x \approx 0$ et une contrainte secondaire $\phi_2 = p_x + x \approx 0$. Comme $\{\phi_1,\phi_2\} = -1 \neq 0$, ces contraintes sont de deuxième classe et on va noter $\xi_1 = \phi_1$, et $\xi_2 = \phi_2$. La matrice des contraintes dans ce cas est

$$\Delta = \begin{bmatrix} 0 & \{\xi_1,\xi_2\} \\ \{\xi_2,\xi_1\} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \Delta^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

et le crochet de Dirac de deux fonctions $f(q,p)$ et $g(q,p)$ est

$$\{f,g\}_D = \{f,g\} - \{f,\xi_1\}\Delta_{12}^{-1}\{\xi_2,g\} - \{f,\xi_2\}\Delta_{21}^{-1}\{\xi_1,g\}$$

$$\{f,g\}_D = \{f,g\} - \{f,p_y - x\}\{p_x + x,g\} + \{f,p_x + x\}\{p_y - x,g\}.$$

Après un calcul direct, les crochets relatifs aux variables fondamentales seront

$$\begin{array}{lll} \{x,y\}_D = -1 & \{x,p_x\}_D = 0 & \{x,p_y\}_D = 0 \\ \{y,p_x\}_D = -1 & \{y,p_y\}_D = 1 & \{p_x,p_y\}_D = 0. \end{array} \tag{3.82}$$

On remarque que $\{x,y\}_D \neq 0$ et que $\{x,p_x\}_D \neq 1$, ce qui constitue une grande différence si on compare avec les crochets de Poisson. A partir du hamiltonien canonique $H_c = \frac{p_x^2}{2} + xy$, on peut obtenir les équations du mouvement à l'aide des relations $\dot{x} \approx \{x,H_c\}_D$, $\dot{y} \approx \{y,H_c\}_D$, $\dot{p}_x \approx \{p_x,H_c\}_D$ et $\dot{p}_y \approx \{p_y,H_c\}_D$, comme suit :

$$\begin{array}{ll} \dot{x} \approx -x & \dot{y} \approx -p_x + y \\ \dot{p}_x \approx x & \dot{p}_y \approx -x. \end{array}$$

Ces équations prises avec les contraintes $p_y - x = 0$ et $p_x + x = 0$ contiennent les équations $\ddot{x} = \dot{y} - y$ et $\dot{x} = -x$ qui ne sont que les équations d'Euler-Lagrange obtenues à partir du lagrangien du départ $L = \frac{\dot{x}^2}{2} + x\dot{y} - xy$.

3.2.7 Symétrie de jauge et crochet de Dirac

Plaçons nous maintenant dans le cas mixte d'un lagrangien singulier présentant des contraintes de première classe $\gamma_s, s = 1...S$, susceptibles de générer des transformations de jauge et des contraintes de deuxième classe $\xi_r, r = 1...R$ (R est pair). Pour fixer la jauge, introduisons des conditions supplémentaires $\zeta_s(q,p) \approx 0, s = 1...S$ dont le nombre est égal au nombre des contraintes de première classe. Ces conditions de fixation de jauge doivent être préservées dans le temps

$$\dot{\zeta}_s \approx \{\zeta_s, H_T\} \approx 0 \quad \Rightarrow \quad \{\zeta_s, H_c\} + \lambda_m \{\zeta_s, \phi_m\} \approx 0 \quad m = 1...M. \tag{3.83}$$

Ces équations prises avec les autres conditions de consistance relatives aux contraintes γ_s et ξ_r doivent fixer les multiplicateurs λ_m définitivement sans donner naissance à d'autres contraintes (secondaires) ou nous conduire à une contradiction. Cela veut dire que si on pose $(\psi_1, ..., \psi_R; \psi_{R+1}, ..., \psi_{R+S}; \psi_{R+S+1}, ...\psi_{R+2S}) = (\xi_1, ..., \xi_R; \gamma_1, ..., \gamma_S; \zeta_1, ..., \zeta_S)$, l'ensemble des $\psi_h, h = 1...R + 2S$ sera le nouveau ensemble de contraintes de notre système et elles seront toutes de deuxième classe. On peut ainsi définir la matrice des contraintes

$$\Delta = \begin{bmatrix} \{\psi_1, \psi_1\} & \cdots & \{\psi_1, \psi_{R+2S}\} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \{\psi_{R+2S}, \psi_1\} & \cdots & \{\psi_{R+2S}, \psi_{R+2S}\} \end{bmatrix} \tag{3.84}$$

Cette matrice est inversible vu que nos nouvelles contraintes sont de deuxième classe (Δ^{-1} existe). Un raisonnement analogue au raisonnement fait précédemment nous permettra de définir le crochet de Dirac

$$\{f, g\}_D = \{f, g\} - \{f, \psi_h\} \Delta^{-1}_{hh'} \{\psi_{h'}, g\} \qquad h, h' = 1...R + 2S. \tag{3.85}$$

De ce fait, on a converti un système ayant des contraintes de première classe en un système avec seulement des contraintes de deuxième classe à l'aide de conditions de fixation de jauge, ce qui nous a permis de définir le crochet de Dirac qui va jouer un rôle crucial dans la quantification canonique de ce type de systèmes singuliers.

Le lagrangien $L = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + x\dot{y} + z^2\dot{z} - xy$ a deux contraintes primaires ($\phi_1 = x - p_y, \phi_2 = z^2 - p_z$) et une contrainte secondaire $\chi_1 = \phi_3 = x + p_x$. Les contraintes $\xi_1 = \phi_1$ et $\xi_2 = \phi_3$ sont de deuxième classe alors que la contrainte $\gamma_1 = \phi_2$ est de première classe. Fixons la jauge avec la condition supplémentaire $\zeta_1 = z \approx 0$ vérifiant la relation $\{\zeta_1, \gamma_1\} = -1 \not\approx 0$. A partir de l'ensemble $\{\psi_1 = z^2 - p_z, \psi_2 = x - p_y, \psi_3 = x + p_x, \psi_4 = z\}$, on aura la matrice des contraintes

$$\Delta = \left[\{\psi_h, \psi_{h'}\}_{h,h'=1...4}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \Delta^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

car le déterminant $\det(\Delta) = 1$. On en déduit l'expression suivante du crochet de Dirac

$$\begin{aligned}\{f,g\}_{D} = \{f,g\} - \{f,\psi_1\}\Delta_{14}^{-1}\{\psi_4,g\} - \{f,\psi_2\}\Delta_{23}^{-1}\{\psi_3,g\} \\ - \{f,\psi_3\}\Delta_{32}^{-1}\{\psi_2,g\} - \{f,\psi_4\}\Delta_{41}^{-1}\{\psi_1,g\}\end{aligned}$$

$$\{f,g\}_{D} = \{f,g\} + \{f,\psi_1\}\{\psi_4,g\} + \{f,\psi_2\}\{\psi_3,g\} - \{f,\psi_3\}\{\psi_2,g\} - \{f,\psi_4\}\{\psi_1,g\}.$$

Si on considère le cas des variables canoniques (x, y, z, p_x, p_y, p_z), on aura les 15 crochets de Dirac suivants :

$$\begin{array}{lll}\{x,y\}_D = -1 & \{x,z\}_D = 0 & \{y,z\}_D = 0 \\ \{x,p_x\}_D = 0 & \{x,p_y\}_D = 0 & \{x,p_z\}_D = 0 \\ \{y,p_x\}_D = -1 & \{y,p_y\}_D = 1 & \{y,p_z\}_D = 0 \\ \{z,p_x\}_D = 0 & \{z,p_y\}_D = 0 & \{z,p_z\}_D = 0 \\ \{p_x,p_y\}_D = 0 & \{p_x,p_z\}_D = 0 & \{p_y,p_z\}_D = 0.\end{array}$$

3.2.8 Quantification canonique des systèmes avec contraintes

Maintenant, ayant une image assez complète de la formulation hamiltonienne classique des systèmes avec contraintes, il faut trouver le moyen de leur donner une version quantique. Deux cas se distinguent : le cas où toutes les contraintes sont de première classe, et le cas où elles se mélangent avec des contraintes de deuxième classe.

1. Quantification de Dirac des systèmes avec seulement des contraintes de première classe

Il est possible, selon Dirac, de quantifier ce genre de systèmes en gardant les mêmes relations de commutation relatives aux systèmes réguliers, à condition que la fonction d'onde vérifie certaines conditions supplémentaires dues à la présence de ces contraintes. Autrement dit, soit un système ayant seulement S contraintes $\gamma_s, s = 1...S$ toutes de première classe. Cela veut dire que

$$\{\gamma_s,\gamma_{s'}\} \approx 0 \Leftrightarrow \{\gamma_s,\gamma_{s'}\} = c_{ss's''}\gamma_{s''} \qquad s,s',s'' = 1...S \tag{3.86}$$

où les $c_{ss's''}$ sont des fonctions des coordonnées et des moments conjugués. Comme le hamiltonien H' est de première classe (page 97), il s'en suit que

$$\{\gamma_s,H'\} \approx 0 \quad \Leftrightarrow \quad \{\gamma_s,H'\} = b_{ss'}\gamma_{s'} \qquad s,s' = 1...S \tag{3.87}$$

où les $b_{ss'}$ sont aussi des fonctions des coordonnées et des moments conjugués. Pour faire le passage vers la mécanique quantique, cherchons d'abord des opérateurs hermitiques $\hat{q}_i$ et $\hat{p}_i$ agissant dans un espace de Hilbert tels que leurs commutateurs soient

$$[\hat{q}_i,\hat{q}_{i'}] = 0 \qquad [\hat{q}_i,\hat{p}_{i'}] = i\hbar\delta_{ii'} \qquad [\hat{p}_i,\hat{p}_{i'}] = 0 \qquad i,i' = 1...N \tag{3.88}$$

où N est le nombre de degré de liberté de notre système. Ensuite, à l'aide de ces derniers, il faut faire correspondre aux contraintes $\gamma_s, s = 1...S$ et au hamiltonien H' des opérateurs hermitiques $\hat{\gamma}_s, s = 1...S$, $\hat{H}'$ vérifiant les relations de commutation

$$[\hat{\gamma}_s, \hat{\gamma}_{s'}] = \hat{c}_{ss's''}\hat{\gamma}_{s''} \qquad [\hat{\gamma}_s, \hat{H}'] = \hat{b}_{ss'}\hat{\gamma}_{s'} \tag{3.89}$$

où les $\hat{c}_{ss's''}$ et $\hat{b}_{ss'}$ sont les opérateurs associés aux coefficients $c_{ss's''}$ et $b_{ss'}$ respectivement. Pour une raison qui viendra juste après, il est très important que ces opérateurs ($\hat{c}_{ss's''}$ et $\hat{b}_{ss'}$) soient à gauche des opérateurs $\hat{\gamma}_s, s = 1...S$ dans les expressions ci-dessus. Maintenant, on peut écrire l'équation de Schrödinger

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi = \hat{H}'\Psi. \tag{3.90}$$

Classiquement nous avons $\gamma_s = 0, s = 1...S$, ce qui va se traduire dans le domaine quantique par les équations supplémentaires sur la fonction d'onde Ψ

$$\hat{\gamma}_s\Psi = 0 \qquad s = 1...S. \tag{3.91}$$

Il est très utile de remarquer que

$$[\hat{\gamma}_s, \hat{\gamma}_{s'}]\Psi = (\hat{\gamma}_s\hat{\gamma}_{s'} - \hat{\gamma}_{s'}\hat{\gamma}_s)\Psi = \hat{\gamma}_s(\hat{\gamma}_{s'}\Psi) - \hat{\gamma}_{s'}(\hat{\gamma}_s\Psi) = 0 \tag{3.92}$$

or d'un autre côté, $[\hat{\gamma}_s, \hat{\gamma}_{s'}] = \hat{c}_{ss's''}\hat{\gamma}_{s''}$, ce qui implique que

$$[\hat{\gamma}_s, \hat{\gamma}_{s'}]\Psi = \hat{c}_{ss's''}\hat{\gamma}_{s''}\Psi = \hat{c}_{ss's''}(\hat{\gamma}_{s''}\Psi) = 0. \tag{3.93}$$

Les deux équations donnent les mêmes résultats sans anomalies. Le raisonnement est analogue avec les commutateurs $[\hat{\gamma}_s, \hat{H}']$, car

$$[\hat{\gamma}_s, \hat{H}']\Psi = \hat{\gamma}_s(\hat{H}'\Psi) - \hat{H}'(\hat{\gamma}_s\Psi) = \hat{\gamma}_s(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}(\hat{\gamma}_s\Psi) = 0. \tag{3.94}$$

Nous avons utilisé le fait que les contraintes $\hat{\gamma}_s = \gamma_s(\hat{q}, \hat{p})$ ne dépendent pas du temps, du coup, $\left[\frac{\partial}{\partial t}, \hat{\gamma}_s\right] = 0$. D'un autre côté, comme $[\hat{\gamma}_s, \hat{H}'] = \hat{b}_{ss'}\hat{\gamma}_{s'}$, on aura l'implication

$$[\hat{\gamma}_s, \hat{H}']\Psi = \hat{b}_{ss'}\,(\hat{\gamma}_{s'}\Psi) = 0. \tag{3.95}$$

C'est pour ces raisons qu'il faut que les opérateurs $\hat{c}_{ss's''}$ et $\hat{b}_{ss'}$ soient à gauche des opérateurs $\hat{\gamma}_s, s = 1...S$ dans les expressions des commutateurs ci-dessus. Ceci étant fait, il nous reste un problème majeur car on ne peut pas toujours être dans cette situation vu que les opérateurs ne commutent pas entre eux et que leur ordre est très important, contrairement aux variables classiques. La non-commutativité est une propriété liée profondément à la physique.

Un bon exemple pour mettre ces résultats en pratique est l'étude du lagrangien $L = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + z\dot{y} + y\dot{z} - V(x)$ ayant les deux contraintes primaires $\gamma_1 = p_y - z \approx 0$ et $\gamma_2 = p_z - y \approx 0$. L'algorithme de consistance montre qu'il s'agit des seules contraintes et que $H' = H_c =$

$\frac{1}{2}p_x^2+V(x)$. Puisque $\{p_y-z,p_z-y\}=0$, nos contraintes sont de première classe, donc pour quantifier le système décrit par ce lagrangien, les opérateurs correspondant aux variables fondamentales doivent être les mêmes utilisées dans le cas régulier. Autrement dit,

$$\hat{x}=x \qquad \hat{y}=y \qquad \hat{z}=z$$
$$\hat{p}_x=-i\hbar\frac{\partial}{\partial x} \qquad \hat{p}_y=-i\hbar\frac{\partial}{\partial y} \qquad \hat{p}_z=-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}$$

et donc

$$\hat{H}'=\tfrac{1}{2}\hat{p}_x^2+v(\hat{x})=-\hbar^2\tfrac{\partial^2}{\partial x^2}+V(x)$$
$$\hat{\gamma}_1=\hat{p}_y-\hat{z}=-i\hbar\tfrac{\partial}{\partial y}-z \qquad \hat{\gamma}_2=\hat{p}_z-\hat{y}=-i\hbar\tfrac{\partial}{\partial z}-y.$$

Classiquement nous avons $\{\gamma_1,\gamma_2\}=\{\gamma_1,H'\}=\{\gamma_2,H'\}=0$, ce qui va être transposé au cas quantique pour donner les commutateurs

$$[\hat{\gamma}_1,\hat{\gamma}_2]=\left[\hat{\gamma}_1,\hat{H}'\right]=\left[\hat{\gamma}_2,\hat{H}'\right]=\left[\hat{\gamma}_1,i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-\hat{H}'\right]=\left[\hat{\gamma}_2,i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-\hat{H}'\right]=0.$$

Ces opérateurs commutent, donc il est possible de leur trouver des fonctions propres communes. La fonction d'onde décrivant l'état quantique de notre système $\Psi=\Psi(x,y,z,t)$ sera alors une solution du système d'équations $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi=\hat{H}'\Psi$, $\hat{\gamma}_1\Psi=0$ et $\hat{\gamma}_2\Psi=0$. Explicitement,

$$i\hbar\tfrac{\partial\Psi}{\partial t}=-\hbar^2\tfrac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}+V(x)\Psi$$
$$-i\hbar\tfrac{\partial\Psi}{\partial y}-z\Psi=0 \qquad -i\hbar\tfrac{\partial\Psi}{\partial z}-y\Psi=0.$$

2. Quantification des systèmes avec contraintes de deuxième classe

Maintenant, supposons que notre système ne possède classiquement que des contraintes de deuxième classe $\xi_r, r=1...R$. Ici, il n'est pas possible de quantifier en imposant des conditions de type $\hat{\xi}_r\Psi=0$ comme on vient de le faire précédemment. En effet, ces conditions impliquent

$$[\hat{\xi}_r,\hat{\xi}_{r'}]\Psi=(\hat{\xi}_r\hat{\xi}_{r'}-\hat{\xi}_{r'}\hat{\xi}_r)\Psi=\hat{\xi}_r\left(\hat{\xi}_{r'}\Psi\right)-\hat{\xi}_{r'}\left(\hat{\xi}_r\Psi\right)=0. \tag{3.96}$$

Mais classiquement on a au moins un crochet $\{\xi_r,\xi_{r'}\}\not\approx 0$ ce qui va se traduire sur le plan quantique par le commutateur $[\hat{\xi}_r,\hat{\xi}_{r'}]\neq\hat{c}_{rr'r''}\hat{\xi}_{r''}$, d'où

$$[\hat{\xi}_r,\hat{\xi}_{r'}]\Psi\neq 0. \tag{3.97}$$

Ces deux équations sont incompatibles l'une avec l'autre d'où l'anomalie.

C'est ici que le crochet de Dirac va trouver sa raison d'être car il est compatible avec les contraintes secondaires. Par analogie au cas régulier (sans contraintes), on va quantifier canoniquement notre système en imposant aux opérateurs de satisfaire les relations de commutation

$$\left[\hat{f},\hat{g}\right]=\left[f\left(\hat{q},\hat{p}\right),g\left(\hat{q},\hat{p}\right)\right]=i\hbar\widehat{\{f\left(q,p\right),g\left(q,p\right)\}_{D}} \tag{3.98}$$

où $\hat{f}$ et $\hat{g}$ sont les opérateurs hermitiques associés aux fonctions $f\left(q,p\right)$ et $g\left(q,p\right)$ définies dans l'espace des phases. Autrement dit, le crochet de Poisson a cédé sa place au crochet de Dirac dans la quantification canonique, en particulier,

$$[\hat{q}_i,\hat{q}_{i'}]=i\hbar\widehat{\{q_i,q_{i'}\}_{D}}\quad[\hat{q}_i,\hat{p}_{i'}]=i\hbar\widehat{\{q_i,p_{i'}\}_{D}}\quad[\hat{p}_i,\hat{p}_{i'}]=i\hbar\widehat{\{p_i,p_{i'}\}_{D}}\quad i,i'=1...N. \tag{3.99}$$

Pour trouver de tels opérateurs vérifiant de tels commutateurs, on peut se servir de nos contraintes de deuxième classe en imposant que $\hat{\xi}_r=\xi_r(\hat{q},\hat{p})=0,r=1...R$. Ainsi dans la représentation de Schrödinger, l'équation d'onde décrivant notre système sera

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi=\hat{H}_c(\hat{q},\hat{p})\Psi. \tag{3.100}$$

Cette procédure se généralise facilement au cas où notre système possède des contraintes de première classe en plus des contraintes secondaires. Nous avons déjà vu qu'à l'aide de conditions de fixation de jauge, il est toujours possible de définir des crochets de Dirac en présence de contraintes de première classe. Une fois que cela est fait, nous n'avons plus qu'à utiliser la procédure présentée ci-dessus (3.99). Il est même possible de procéder de cette manière quand toutes les contraintes sont de première classe en fixant la jauge au lieu d'utiliser la quantification de Dirac déjà discutée dans la sous-section précédente.

Mais comme dans le cas de cette dernière, le problème de la non commutativité des opérateurs dans le domaine quantique, rend les choses très délicates car l'ordre est très important et a des conséquences physiques. A cela s'ajoute le fait d'inverser la matrice des contraintes qui peut conduire à des crochets difficiles à satisfaire par les opérateurs associés comme dans le cas du lagrangien $L=\frac{\dot{x}^2}{2}+x\dot{y}-V(x,y)$ qui semble trivial et qui donne naissance au crochet de Dirac $\{x,y\}_D=-\frac{1}{1+\partial_y^2V(x,y)}$ difficile à réaliser du fait que x et y ne commutent pas.

En mécanique classique, le problème d'un point de charge q et de masse m se déplaçant dans le plan xy sous l'infuence d'un champ $\vec{B}=B_0\vec{k}$ magnétique homogène orienté dans la direction z, peut être décrit par le lagrangien $L=\frac{1}{2}m\vec{v}^2+q\vec{A}.\vec{v}-qV$ où $\vec{v}=(\dot{x},\dot{y})$ est le vecteur vitesse, $\vec{A}=\vec{A}(x,y)$ est le potentiel vecteur du champ magnétique $\vec{B}$ et $V=V(x,y)$ est le potentiel scalaire. Dans la jauge $\vec{A}=\frac{B_0}{2}\left(-y\vec{i}+x\vec{j}\right)$, le lagrangien devient après simplification

$$L=\frac{m}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)+\frac{qB_0}{2}\left(x\dot{y}-y\dot{x}\right)-qV\left(x,y\right).$$

On va considérer la limite où $\frac{qB_0}{m}\gg1\Rightarrow\frac{m}{qB_0}\ll1\Rightarrow\frac{m}{qB_0}\simeq0$ qui correspond à un champ magnétique très intense, dans ce cas, on peut négliger le terme de masse et le lagrangien va devenir linéaire par rapport aux vitesses

$$L=\frac{qB_0}{2}\left(x\dot{y}-y\dot{x}\right)-qV\left(x,y\right).$$

Nous sommes alors en présence de deux contraintes primaires $\phi_1 = p_x + \frac{qB_0}{2}y \approx 0$ et $\phi_2 = p_y - \frac{qB_0}{2}x \approx 0$ qui vont nous permettre de construire le hamiltonien canonique $H_c = qV(x,y)$. Le hamiltonien total $H_T = H_c + \lambda_1\phi_1 + \lambda_2\phi_2$ et les conditions de consistance $\{\phi_j, H_T\} \approx 0$ vont déterminer les multiplicateurs λ_1 et λ_2.

$$\{\phi_1, H_c\} + \lambda_2 \{\phi_1, \phi_2\} \approx 0 \Rightarrow -q\frac{\partial V}{\partial x} + \lambda_2 qB_0 \approx 0 \Rightarrow \lambda_2 \approx \frac{1}{B_0}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)$$
$$\{\phi_2, H_c\} + \lambda_1 \{\phi_2, \phi_1\} \approx 0 \Rightarrow -q\frac{\partial V}{\partial y} - \lambda_1 qB_0 \approx 0 \Rightarrow \lambda_1 \approx \frac{1}{B_0}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right).$$

Par conséquent, on n'a pas de contraintes secondaires et comme $\{\phi_1, \phi_2\} = qB_0 \not\approx 0$, les deux contraintes ϕ_1 et ϕ_2 sont de deuxième classe. Il sera commode alors de les noter ξ_1 et ξ_2 dans cet ordre. Calculons maintenant la matrice des contraintes Δ.

$$\Delta = qB_0 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \Delta^{-1} = \frac{1}{qB_0}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

A ce stade, il est possible de définir le crochet de Dirac de deux fonctions f et g par l'expression

$$\{f,g\}_D = \{f,g\} + \frac{1}{qB_0}(\{f,\xi_1\}\{\xi_2,g\} - \{f,\xi_2\}\{\xi_1,g\}).$$

Dans ce cas particulier, les crochets non nuls des variables fondamentales sont

$$\{x,y\}_D = -\frac{1}{qB_0} \quad \{x,p_x\}_D = \frac{1}{2} \quad \{y,p_y\}_D = \frac{1}{2} \quad \{p_x,p_y\}_D = -\frac{qB_0}{4}.$$

Les opérateurs correspondants $\hat{x}, \hat{y}, \hat{p}_x$ et $\hat{p}_y$ qui doivent être hermitiques vont vérifier les relations de commutation

$$[\hat{x},\hat{y}] = -\frac{i\hbar}{qB_0} \qquad [\hat{x},\hat{p}_x] = \frac{i\hbar}{2} \qquad [\hat{y},\hat{p}_y] = \frac{i\hbar}{2} \qquad [\hat{p}_x,\hat{p}_y] = -\frac{i\hbar}{4}qB_0$$

tandis que les autres commutateurs doivent être nuls. On remarque déjà que le commutateur $[\hat{x},\hat{y}]$ est différent de 0, ce qui peut conduire à une sorte de "géométrie non commutative". Dans la représentation de Schrödinger, il est possible de réaliser la première relation en choisissant d'une façon symétrique

$$\hat{x} = x - \frac{i\hbar}{2qB_0}\frac{\partial}{\partial y} \qquad \hat{y} = y + \frac{i\hbar}{2qB_0}\frac{\partial}{\partial x}. \tag{I}$$

Les opérateurs $\hat{p}_x$ et $\hat{p}_y$ s'obtiennent en transposant les contraintes $p_x + \frac{qB_0}{2}y = 0$ et $p_y - \frac{qB_0}{2}x = 0$ au domaine quantique, c'est-à-dire,

$$\hat{p}_x + \tfrac{qB_0}{2}\hat{y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{p}_x = -\tfrac{qB_0}{2}\hat{y}$$
$$\hat{p}_y - \tfrac{qB_0}{2}\hat{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{p}_y = \tfrac{qB_0}{2}\hat{x}.$$

En utilisant les relations (I), on obtient les opérateurs recherchés

$$\hat{p}_x = -\frac{qB_0}{2}y - \frac{i\hbar}{4}\frac{\partial}{\partial x} \qquad \hat{p}_y = \frac{qB_0}{2}x - \frac{i\hbar}{4}\frac{\partial}{\partial y}.$$

Maintenant, si on met de côté le problème de l'ordre des opérateurs, il est possible d'écrire l'équation de Schrödinger sous la forme

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \hat{H}_c\Psi \qquad ; \qquad i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = qV\left(\hat{x},\hat{y}\right)\Psi.$$

Pour récapituler, nous avons commencé par un lagrangien linéaire par rapport aux vitesses ce qui a donné naissance à deux contraintes primaires de deuxième classe. A l'aide de ces contraintes, nous avons construit les crochets de Dirac ce qui a rendu possible la quantification canonique. Finalement nous avons écrit l'équation de Schrödinger après avoir choisi les bons opérateurs différentiels vérifiant l'algèbre des commutateurs.

3.3 L'approche de Faddeev et Jackiw

Nous avons vu dans la section précédente que le formalisme développé par Dirac est très puissant et cohérent mais il nécessite beaucoup de concepts comme la classification en contraintes de première et de deuxième classe ainsi que le calcul d'un nombre considérable de crochets de Poisson. En 1988, une autre méthode d'étudier les systèmes singuliers a vu le jour sous la direction de Faddeev et de Jackiw. Leur approche repose sur la géométrie symplectique qui consiste d'abord à linéariser le lagrangien par rapport aux vitesses et ensuite à inverser la matrice symplectique obtenue à l'aide des équations d'Euler-Lagrange. L'intérêt principal de leur méthode c'est qu'ils arrivent dans beaucoup de situations à dériver directement les crochets de Dirac avec le moins possible de concepts et sans calculer aucun crochet de Poisson contrairement à la démarche de Dirac.

3.3.1 Linéarisation du lagrangien par rapport aux vitesses

Considérons le lagrangien singulier autonome $L(q_i,\dot{q}_i)$, $i = 1...N$ dont la matrice hessienne $\left[\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}_i\partial\dot{q}_j}\right]$ est de rang $R < N$. Cela veut dire qu'il est possible d'inverser les équations $p_i = \frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}(q_j,\dot{q}_j)$ seulement par rapport à R vitesses généralisées $\dot{q}_a, a = 1...R$ en les écrivant comme étant des fonctions des autres vitesses, des coordonnées généralisées et des moments conjugués

$$\dot{q}_a = f_a(q_j,p_b,\dot{q}_\beta) \qquad a,b = 1...R; \beta = R+1...N; j = 1...N \tag{3.101}$$

et les autres relations ne sont que les $N-R$ contraintes primaires

$$\phi_\alpha = p_\alpha - g_\alpha(q_j,p_b) \qquad b = 1...R; \alpha = R+1...N; j = 1...N. \tag{3.102}$$

Le hamiltonien canonique sera alors

$$H = p_i\dot{q}_i - L(q_j,\dot{q}_j) = p_a\dot{q}_a + p_\alpha\dot{q}_\alpha - L(q_j,\dot{q}_b,\dot{q}_\beta) \qquad a,b = 1...R; \alpha,\beta = R+1...N$$

soit

$$H = p_a f_a(q_j, p_b, \dot{q}_\beta) + g_\alpha(q_j, p_b)\dot{q}_\alpha - L(q_j, f_b(q_k, p_c, \dot{q}_\gamma), \dot{q}_\beta) \tag{3.103}$$

où $i,j,k = 1...N$; $a,b,c = 1...R$ et $\alpha, \beta, \gamma = R+1...N$. On se propose maintenant de démontrer en utilisant (3.101) et (3.102) que ce hamiltonien $H = H(q_i, p_a)$ ne dépend pas des vitesses généralisées, ce qui revient à vérifier que $\frac{\partial H}{\partial \dot{q}_\rho} = 0, \rho = R+1...N$. Nous avons

$$\frac{\partial L(q_j, f_b(q_k, p_c, \dot{q}_\gamma), \dot{q}_\beta)}{\partial \dot{q}_\rho} = \frac{\partial L(q_j, \Gamma_b, \dot{q}_\beta)}{\partial \dot{q}_\rho}|_{\Gamma_b = f_b(q_k, p_c, \dot{q}_\gamma)} + \frac{\partial L(q_j, f_b(q_k, p_c, \dot{q}_\gamma), \Lambda_\beta)}{\partial \dot{q}_\rho}|_{\Lambda_\beta = \dot{q}_\beta},$$

or

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_\rho} L(q_j, \Gamma_b, \dot{q}_\beta)|_{\Gamma_b = f_b(q_k, p_c, \dot{q}_\gamma)} = p_\rho = g_\rho(q_j, p_b)$$

car $p_\rho = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\rho} = g_\rho(q_j, p_b), \rho = R+1...N$, et

$$\frac{\partial L(q_j, f_b(q_k, p_c, \dot{q}_\gamma), \Lambda_\beta)}{\partial \dot{q}_\rho}|_{\Lambda_\beta = \dot{q}_\beta} = \frac{\partial L(q_j, f_b, \Lambda_\beta)}{\partial f_a}|_{\Lambda_\beta = \dot{q}_\beta} \frac{\partial f_a(q_k, p_c, \dot{q}_\gamma)}{\partial \dot{q}_\rho} = p_a \frac{\partial f_a(q_k, p_c, \dot{q}_\gamma)}{\partial \dot{q}_\rho}$$

car $\dot{q}_a = f_a(q_k, p_c, \dot{q}_\gamma), a = 1...R$ et $p_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a}$. Cela revient à dire que

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_\rho} L(q_j, f_b(q_k, p_c, \dot{q}_\gamma), \dot{q}_\beta) = g_\rho(q_j, p_b) + p_a \frac{\partial f_a(q_k, p_c, \dot{q}_\gamma)}{\partial \dot{q}_\rho}.$$

A présent, en utilisant (3.103), il est facile de vérifier que $\frac{\partial H}{\partial \dot{q}_\rho} = 0$ comme suit :

$$\frac{\partial H}{\partial \dot{q}_\rho} = p_a \frac{\partial f_a(q_j, p_b, \dot{q}_\beta)}{\partial \dot{q}_\rho} + g_\alpha(q_j, p_b)\delta_{\alpha\rho} - \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\rho} L(q_j, f_b(q_k, p_c, \dot{q}_\gamma), \dot{q}_\beta) = 0 \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Pour avoir un lagrangien linéaire par rapport aux vitesses, il suffit d'utiliser la transformation de Legendre $H = p_i \dot{q}_i - L$ et les contraintes (3.102). En effet,

$$L = p_i \dot{q}_i - H(q_j, p_a) = p_a \dot{q}_a + p_\alpha \dot{q}_\alpha - H(q_j, p_a) \tag{3.104}$$

d'où

$$L(q_j, \dot{q}_j, p_b) = p_a \dot{q}_a + g_\alpha(q_j, p_b)\dot{q}_\alpha - H(q_j, p_b) \tag{3.105}$$

où $a,b = 1...R; \alpha = R+1...N$ et $i,j = 1...N$. Le lagrangien $L(q_j, \dot{q}_j, p_b)$ dépend de N coordonnées généralisées et de leurs vitesses généralisées auxquelles s'ajoutent R moments conjugués ce qui est le prix de transformer le lagrangien de départ. Pour appliquer les équations d'Euler-Lagrange à ce lagrangien, il faut voir les q_j et les p_b comme étant des variables indépendantes et pour ce faire il ne faut surtout pas remplacer les $\dot{q}_a$ par leurs expressions données par (3.101). En effet, nous aurons

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} = \frac{\partial L}{\partial q_a} & \Rightarrow \quad \dot{p}_a = \frac{\partial g_\beta(q_j, p_b)}{\partial q_a}\dot{q}_\beta - \frac{\partial H(q_j, p_b)}{\partial q_a} \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} & \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} g_\alpha(q_j, p_b) = \frac{\partial g_\beta(q_j, p_b)}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\beta - \frac{\partial H(q_j, p_b)}{\partial q_\alpha} \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{p}_a} = \frac{\partial L}{\partial p_a} & \Rightarrow \quad 0 = \dot{q}_a + \frac{\partial g_\beta(q_j, p_b)}{\partial p_a}\dot{q}_\beta - \frac{\partial H(q_j, p_b)}{\partial p_a} \end{cases} \tag{3.106}$$

d'où les $N+R$ équations différentielles

$$\begin{cases} \dot{p}_a - \frac{\partial g_\beta(q_j,p_b)}{\partial q_a}\dot{q}_\beta + \frac{\partial H(q_j,p_b)}{\partial q_a} = 0 \\ \frac{\partial g_\alpha(q_j,p_b)}{\partial q_c}\dot{q}_c - \left(\frac{\partial g_\beta(q_j,p_b)}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial g_\alpha(q_j,p_b)}{\partial q_\beta}\right)\dot{q}_\beta + \frac{\partial g_\alpha(q_j,p_b)}{\partial p_c}\dot{p}_c + \frac{\partial H(q_j,p_b)}{\partial q_\alpha} = 0 \\ \dot{q}_a + \frac{\partial g_\beta(q_j,p_b)}{\partial p_a}\dot{q}_\beta - \frac{\partial H(q_j,p_b)}{\partial p_a} = 0. \end{cases} \tag{3.107}$$

où a,b,$c = 1...R$ et $\alpha, \beta = R+1...N$. Ces dernières prises avec les contraintes (3.102) sont équivalentes aux équations qu'on peut obtenir à partir du lagrangien de départ $L(q_i, \dot{q}_i)$, $i = 1...N$ qui n'est pas forcément linéaire par rapport aux vitesses généralisées $\dot{q}_i$, $i = 1...N$.

Prenons comme exemple, le lagrangien $L = \frac{(\dot{x}+x\dot{y})^2}{2} + e^{-w}\frac{\dot{z}^2}{2} + \sin(z)\dot{w} - \frac{zw^2}{2}$, alors les moments conjugués seront

$$p_x = \dot{x} + x\dot{y} \quad p_y = x(\dot{x} + x\dot{y}) \quad p_z = e^{-w}\dot{z} \quad p_w = \sin(z)$$

d'où l'on en déduit l'inversion

$$\dot{x} = p_x - x\dot{y} \qquad p_y = xp_x \qquad \dot{z} = e^w p_z \qquad p_w = \sin(z).$$

En remplaçant dans le hamiltonien $H = \dot{x}p_x + \dot{y}p_y + \dot{z}p_z + \dot{w}p_w - L$, on obteint

$$H = \frac{p_x^2}{2} + e^w\frac{p_z^2}{2} + \frac{zw^2}{2}$$

et le lagrangien linéaire $L = \dot{x}p_x + \dot{y}p_y + \dot{z}p_z + \dot{w}p_w - H$ sera alors

$$L = p_x\dot{x} + xp_x\dot{y} + p_z\dot{z} + \sin(z)\dot{w} - \left(\frac{p_x^2}{2} + e^w\frac{p_z^2}{2} + \frac{zw^2}{2}\right). \tag{3.108}$$

Les variables indépendantes maintenant sont x, y, z, w, p_x et p_z contrairement au moments p_y et p_w qui sont donnés par les relations $p_y = xp_x$ et $p_w = \sin(z)$ (des contraintes).

3.3.2 Principe de la méthode de Faddeev-Jackiw

Afin de traiter les variables $q_i, i = 1...N$ et $p_a, a = 1...R$ sur le même pied d'égalité et mettre le lagrangien (3.105) sous une forme condensée, introduisons les nouvelles variables $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_{N+R})$ définies par $\xi_i = q_i, i = 1...N$ et $\xi_{N+a} = p_a, a = 1...R$. Alors

$$L = A_I(\xi)\dot{\xi}_I - H(\xi) \qquad\qquad I = 1...N+R \tag{3.109}$$

où $A_a(\xi) = p_a, a = 1...R$, $A_\alpha(\xi) = g_\alpha(q_j, p_b), \alpha = R+1...N$ et $A_{N+a}(\xi) = 0, a = 1...R$. Autrement dit,

$$\begin{array}{c} \xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_N, ..., \xi_{N+R}) = (q_1, q_2, ..., q_N, p_1, p_2, ..., p_R) \\ A(\xi) = (A_1, A_2, ..., A_{N+R}) = (p_1, p_2, ..., p_R, g_{R+1}, ..., g_N, 0, ..., 0). \end{array} \tag{3.110}$$

Notre lagrangien est autonome linéaire par rapport aux vitesses, et les équations d'Euler-Lagrange $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_I} - \frac{\partial L}{\partial \xi_I} = 0$ nous conduisent aux relations

$$\frac{\partial A_I}{\partial \xi_J}\dot{\xi}_J - \frac{\partial A_J}{\partial \xi_I}\dot{\xi}_J + \frac{\partial H}{\partial \xi_I} = 0. \tag{3.111}$$

Après transformation

$$\left(\frac{\partial A_J}{\partial \xi_I} - \frac{\partial A_I}{\partial \xi_J}\right)\dot{\xi}_J = \frac{\partial H}{\partial \xi_I} \tag{3.112}$$

soit

$$f_{IJ}\,\dot{\xi}_J = \frac{\partial H}{\partial \xi_I} \qquad\qquad I, J = 1...N+R. \tag{3.113}$$

A ce stade on voit bien apparaître la matrice symplectique $f_{IJ} = \left(\frac{\partial A_J}{\partial \xi_I} - \frac{\partial A_I}{\partial \xi_J}\right)$ qui est une matrice antisymétrique.

Le hamiltonien canonique obtenu à partir du lagrangien précédent sera exactement $H(\xi)$ et les équations canoniques dont on suppose l'existence doivent être de la forme

$$\dot{\xi}_I = \{\xi_I, H\} \qquad\qquad \dot{\xi}_I = \{\xi_I, \xi_J\}\frac{\partial H}{\partial \xi_J}. \tag{3.114}$$

Pour l'instant, on va mettre du coté la nature du crochet $\{,\}$. Pour aller de l'avant on distingue deux cas : le premier est lorsque la matrice f est inversible et le deuxième correspond au cas contraire. Si la matrice f^{-1} existe, il est facile d'utiliser (3.113) pour avoir la relation

$$\dot{\xi}_I = f^{-1}_{IJ}\frac{\partial H}{\partial \xi_J} \tag{3.115}$$

et une comparaison directe avec (3.114) nous permet d'avoir les crochets

$$\{\xi_I, \xi_J\} = f^{-1}_{IJ}. \tag{3.116}$$

Nous avons ainsi obtenu les crochets relatifs aux variables fondamentales d'où la possibilité de procéder à une quantification canonique, car le crochet $\{\xi_I, \xi_J\}$ n'est rien d'autre que le crochet de Dirac de ξ_I et ξ_J obtenu par l'approche de Faddeev-Jackiw.

Maintenant, examinons le cas où la matrice f est singulière de rang $R_1 < N+R$. Dans ce cas, elle a $N+R-R_1$ modes-zéros $v^{(m)}(\xi)$ indépendants ($m = 1...N+R-R_1$) vérifiant la relation

$$v^{(m)} f = 0 \qquad\qquad v^{(m)}_I f_{IJ} = 0. \tag{3.117}$$

La multiplication à droite de (3.113) par l'un des $v^{(m)}$ va en principe donner naissance aux contraintes [9]

$$0 = v^{(m)}_I \frac{\partial H}{\partial \xi_I} = \phi_m(\xi) \qquad\qquad m = 1...N+R-R_1. \tag{3.118}$$

9. Il se peut qu'on n'obtient pas de contraintes, seulement des identités de type (0=0). Cela est dû à la présence de symétrie de jauge dont le traitement est expliqué ci-dessous.

Ces contraintes $\phi_m(\xi) = 0, m = 1...N+R-R_1$ sont des relations entre les $\xi_I, I = 1...N+R$ qui doivent se conserver dans le temps

$$\dot{\phi}_m = \frac{d}{dt}\phi_m = \frac{\partial \phi_m}{\partial \xi_I}\dot{\xi}_I = 0. \tag{3.119}$$

Pour ce faire, on va ajouter au lagrangien (3.109) ou bien des termes de la forme $\left(\lambda_m \frac{\partial \phi_m}{\partial \xi_I}\dot{\xi}_I\right)$, ou bien de la forme [10] $\left(\dot{\lambda}_m \phi_m(\xi)\right)$ et il en résultera un nouveau lagrangien linéaire par rapport aux $\dot{\xi}_I$ et $\dot{\lambda}_m$ ayant l'expression

$$L = A_I(\xi)\dot{\xi}_I + \phi_m(\xi)\dot{\lambda}_m - H(\xi) \qquad I = 1...N+R, m = 1...N+R-R_1. \tag{3.120}$$

Il faut que cela soit clair, les $\lambda_m, m = 1...N+R-R_1$ doivent être traités comme de nouvelles variables indépendantes. Après une petite transformation, les équations d'Euler-Lagrange cette fois-ci seront

$$\begin{array}{l} \left(\frac{\partial A_J}{\partial \xi_I} - \frac{\partial A_I}{\partial \xi_J}\right)\dot{\xi}_J + \frac{\partial \phi_m}{\partial \xi_I}\dot{\lambda}_m = \frac{\partial H}{\partial \xi_I} \\ -\frac{\partial \phi_m}{\partial \xi_J}\dot{\xi}_J = 0. \end{array} \tag{3.121}$$

Ces dernières équations traduisent la conservation des contraintes ϕ_m au cours du temps. Réécrivons les équations précédentes sous forme matricielle

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \left(\frac{\partial A_J}{\partial \xi_I} - \frac{\partial A_I}{\partial \xi_J}\right) & \frac{\partial \phi_m}{\partial \xi_I} \\ -\frac{\partial \phi_m}{\partial \xi_J} & 0 \end{bmatrix}}_{f} \begin{bmatrix} \dot{\xi}_J \\ \dot{\lambda}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial \xi_I} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.122}$$

où la nouvelle matrice f est carrée antisymétrique de dimension $(N+R)+(N+R-R_1) = 2(N+R)-R_1$. A ce stade, on distingue trois cas :

1. f est inversible et les crochets fondamentaux s'obtiennent à l'aide de f^{-1}. Autrement dit, $\{\xi_I, \xi_J\} = f^{-1}_{IJ}$ et l'algorithme se termine ici.

2. f est singulière mais les modes-zéro ne donnent aucune nouvelle contrainte, signe de présence de symétrie de jauge. Dans ce cas, des conditions supplémentaires $\zeta_n(\xi) = 0$ sont nécessaires afin de fixer la jauge. On les introduit dans le lagrangien (3.120) en lui ajoutant des termes de la forme $\dot{\omega}_n \zeta_n(\xi)$ où les ω_n sont des multiplicateurs, ensuite il faut écrire les équations d'Euler-Lagrange par rapport aux variables ξ_I, λ_m et ω_n. Le choix et le nombre de conditions de jauge $\zeta_n(\xi)$ doivent se faire de telle sorte à avoir une nouvelle matrice f inversible d'un seul coup, ce qui va nous donner les crochets $\{\xi_I, \xi_J\} = f^{-1}_{IJ}$. Cela veut dire que les conditions de jauge doivent être indépendantes des autres contraintes et aussi indépendantes entre elles.

3. f est singulière et la recherche des modes-zéro se solde par l'obtention de nouvelles contraintes, il faut alors les ajouter au lagrangien (3.120) avec des multiplicateurs, ensuite recommencer la procédure à partir de zéro avec le nouveau lagrangien qui en résulte.

10. En effet, $\lambda_m \frac{\partial \phi_m}{\partial \xi_I}\dot{\xi}_I = \frac{d}{dt}\left(\lambda_m \phi_m(\xi)\right) - \dot{\lambda}_m \phi_m(\xi)$.

Il faut continuer dans cette démarche jusqu'à ce qu'on obtient les crochets $\{\xi_I, \xi_J\}$, soit par une matrice f inversible, soit après fixation de jauge. Une fois que cela est fait, on peut procèder à une quantification canonique à l'aide de ces crochets. Il est clair à présent qu'avec Faddeev et Jackiw, on ne fait pas de distinction entre les contraintes contrairement au formalisme de Dirac.

3.3.3 Exemples d'application

1. Nous considérons d'abord le problème simple d'une particule non relativiste de charge q et de masse m, en présence d'un champ magnétique intense constant $\overrightarrow{B}_0$ orienté dans la direction z. Dans ce cas, le terme de masse peut être négligé et le lagrangien se réduira à la forme

$$L = \frac{qB_0}{2}(x\dot{y} - y\dot{x}) - qV(x,y).$$

Ce lagrangien est déjà linéaire par rapport aux vitesses et les d'Euler-Lagrange peuvent se mettre sous la forme

$$2\eta \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{f} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q\frac{\partial V(x,y)}{\partial x} \\ q\frac{\partial V(x,y)}{\partial y} \end{pmatrix}$$

où $\eta = \frac{qB_0}{2}$. La matrice f est non singulière et son inverse est

$$f^{-1} = \frac{1}{2\eta}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{x,x\} & \{x,y\} \\ \{y,x\} & \{y,y\} \end{pmatrix}.$$

et on conclut que $\{x,y\} = -\frac{1}{2\eta} = -\frac{1}{qB_0}$. Pour calculer les autres crochets, on peut utiliser le fait qu'ici $p_x = -\eta y$ et $p_y = \eta x$.

2. Dans un deuxième cas, considérons le système décrit par le lagrangien

$$L = \frac{1}{2}(y\dot{x} + x\dot{y})^2 - xy.$$

En utilisant le fait que $p_y = \frac{xp_x}{y}$, on obtient le hamiltonien canonique $H = \frac{1}{2}\frac{p_x^2}{y^2} + xy$, ce qui nous permettra de linéariser le lagrangien précédent à l'aide de la relation $L = \dot{x}p_x + \dot{y}p_y - H$. Autrement dit,

$$L = z\dot{x} + \frac{xz}{y}\dot{y} - \frac{1}{2}\frac{z^2}{y^2} - xy$$

où $z = p_x$.

Les variables indépendantes sont maintenant x, y et z, et les équations d'Euler-Lagrange vont prendre la forme matricielle

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \frac{z}{y} & -1 \\ -\frac{z}{y} & 0 & -\frac{x}{y} \\ 1 & \frac{x}{y} & 0 \end{pmatrix}}_{f} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -\frac{z^2}{y^3} + x \\ \frac{z}{y^2} \end{pmatrix}.$$

La matrice f est antisymétrique singulière vu que $\det(f) = 0$. Le seul mode-zéros est $(\ -x \quad y \quad z\ )$, mais cela ne donne pas naissance à de nouvelles contraintes. Donc, la matrice f reste toujours singulière et on a pas de contraintes, ce qui est le signe que nous sommes bien en présence d'une symétrie de jauge. Nous choisissons la condition de jauge $y = 1$ en ajoutant le terme $\dot{\omega}(y-1)$ au lagrangien du départ afin d'avoir le nouveau lagrangien

$$L = z\dot{x} + \frac{xz}{y}\dot{y} - \frac{1}{2}\frac{z^2}{y^2} - xy + \dot{\omega}(y-1)$$

et les équations d'Euler-Lagrange

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \frac{z}{y} & -1 & 0 \\ -\frac{z}{y} & 0 & -\frac{x}{y} & 1 \\ 1 & \frac{x}{y} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{f} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{\omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -\frac{z^2}{y^3} + x \\ \frac{z}{y^2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice f^{-1} existe et elle est donnée par

$$f^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \frac{x}{y} \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -\frac{z}{y} \\ -\frac{x}{y} & 1 & \frac{z}{y} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{x,x\} & \{x,y\} & \{x,z\} & \{x,\omega\} \\ \{y,x\} & \{y,y\} & \{y,z\} & \{y,\omega\} \\ \{z,x\} & \{z,y\} & \{z,z\} & \{z,\omega\} \\ \{\omega,x\} & \{\omega,y\} & \{\omega,z\} & \{\omega,\omega\} \end{pmatrix}$$

d'où les crochets

$$\{x,y\} = 0 \quad ; \quad \{y,z\} = 0 \quad ; \quad \{x,z\} = 1.$$

Pour avoir les crochets avec p_y, on utilise la relation $p_y = \frac{xp_x}{y} = xp_x = xz$.

3. Terminons par l'étude du lagrangien non linéaire $L = \frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{x^2}{2}\dot{y} - \frac{x^2}{2}y$. Sachant que les moments conjugués sont $p_x = \dot{x}$ et $p_y = \frac{x^2}{2}$, la transformation de Legendre $H = \dot{x}p_x + \dot{y}p_y - L$, nous permet de construire le hamiltonien

$$H = \frac{p_x^2}{2} + \frac{x^2}{2}y.$$

Toujours à l'aide de la transformation de Legendre, on peut écrire que $L = \dot{x}p_x + \dot{y}p_y - H$, et en utilisant la relation $p_y = \frac{x^2}{2}$, on obtient le lagrangien linéaire

$$L = z\dot{x} + \frac{x^2}{2}\dot{y} - \frac{z^2}{2} - \frac{x^2}{2}y$$

où $z = p_x$, ce qui fait que x, y et z doivent-être considérés comme étant des variables indépendantes.

Les équations d'Euler-Lagrange vont alors prendre la forme matricielle

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & x & -1 \\ -x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{f} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy \\ \frac{x^2}{2} \\ z \end{pmatrix}$$

où la matrice f est singulière ($\det(f) = 0$) et antisymétrique dont le seul mode-zéro est $v = (\ 0 \quad 1 \quad x\ )$. La multiplication à gauche du système précédent par ce mode-zéro nous permet d'avoir la contrainte $\frac{x}{2} + z = 0$ (car $x \neq 0$). Pour que cette dernière se conserve dans le temps ($\frac{\dot{x}}{2} + \dot{z} = 0$), nous allons ajouter au lagrangien précédent le terme $\dot{\lambda}(\frac{x}{2} + z)$ et le résultat sera ce lagrangien

$$L = z\dot{x} + \frac{x^2}{2}\dot{y} - \frac{z^2}{2} - \frac{x^2}{2}y + \dot{\lambda}(\frac{x}{2} + z)$$

où λ est un multiplicateur de Lagrange qu'on doit traiter comme une nouvelle variable. Les nouvelles équations d'Euler-Lagrange vont prendre la forme

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & x & -1 & +1/2 \\ -x & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1/2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{f} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy \\ \frac{x^2}{2} \\ z \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Cette fois-ci la matrice f est antisymétrique inversible car $\det(f) = x^2 \neq 0$, et la matrice inverse est

$$f^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{x} & 0 & 0 \\ \frac{1}{x} & 0 & -\frac{1}{2x} & -\frac{1}{x} \\ 0 & \frac{1}{2x} & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{x} & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{x,x\} & \{x,y\} & \{x,z\} & \{x,\lambda\} \\ \{y,x\} & \{y,y\} & \{y,z\} & \{y,\lambda\} \\ \{z,x\} & \{z,y\} & \{z,z\} & \{z,\lambda\} \\ \{\lambda,x\} & \{\lambda,y\} & \{\lambda,z\} & \{\lambda,\lambda\} \end{pmatrix}$$

Il s'en suit que

$$\{x,y\} = -1/x \quad ; \quad \{y,z\} = -1/(2x) \quad ; \quad \{x,z\} = 0.$$

Pour avoir le reste des crochets, il ne faut pas perdre de vue que $z = p_x$ et $p_y = \frac{x^2}{2}$.

Ces exemples montrent qu'effectivement, l'approche de Faddeev et de Jackiw permet de déterminer les crochets de Dirac directement sans passer par le formalisme de ce dernier.

Chapitre 4

La méthode des constantes d'intégration pour la détermination directe des crochets de Dirac

Nous avons vu dans le chapitre précédent que les travaux de Dirac et de Bergmann sur les systèmes hamiltoniens avec contraintes constituent un outil très puissant. En effet, ils ont mis en place un formalisme hamiltonien généralisé permettant de quantifier canoniquement ces systèmes bien qu'ils soient issus de lagrangiens singuliers et cela en abandonnant les crochets de Poisson pour les crochets de Dirac qui sont mieux adaptés à la présence de contraintes. A cela s'ajoute la méthode de Faddeev et de Jackiw qui est une approche symplectique directe ayant moins de concepts, mais capablde de déterminer les crochets fondamentaux indispensables à une éventuelle quantification canonique.

Maintenant, essayons d'analyser cette situation : classiquement, la résolution analytique des équations du mouvement d'un système nous permet de connaître l'évolution de son état d'une façon exacte en partant de conditions initiales bien déterminées. Autrement dit, la solution contient en principe toutes les informations relatives à notre système. La question légitime qui va se poser maintenant est la suivante : est ce qu'il est possible de déduire les crochets de Dirac (où de Poisson) nécessaires à la quantification directement à partir de cette solution analytique ? Cela revient à dire, quand un système est classiquement intégrable, est-il possible de le quantifier sans passer par le formalisme de Dirac ni par la méthode Faddeev-Jackiw, ce qui va nous épargner beaucoup de temps et de concepts ? En effet, en théorie des champs par exemple, on peut toujours avoir la solution libre, mais alors pourquoi ne pas l'utiliser pour faire une quantification directe ? Il est à ajouter à cela le fait qu'on peut se servir de logiciels du calcul formel tels que Maple, Mathematica et Maxima pour trouver beaucoup de solutions analytiques des équations du mouvement, pour ensuite les utiliser afin d'obtenir directement les crochets.

Comme réponse à cette problématique, nous allons exposer dans ce chapitre, une nouvelle approche pour quantifier les systèmes classiquement solubles [85]. En effet, en s'inspirant de la quantification canonique de l'oscillateur harmonique dans la représentation de Heisenberg, nous allons construire une nouvelle méthode permettant de retrouver les

mêmes résultats que les méthodes de Dirac et de Faddeev, mais d'une autre façon très simple et accessible sans exiger des outils mathématiques très avancés. Nous allons d'abord vérifier la validité de notre méthode en l'appliquant à des systèmes réguliers bien connus en mécanique quantique, ensuite viendra l'étape la plus importante où nous nous intéresserons aux systèmes hamiltoniens avec contraintes, afin de démontrer qu'en partant d'un lagrangien singulier autonome, on peut à l'aide de notre procédure arriver aux mêmes résultats que ceux obtenus à l'aide du formalisme de Dirac et de Bergmann ou en suivant la procédure de Faddeev et Jackiw. Nous terminerons le chapitre avec une application en théorie quantique des champs.

4.1 Motivation

L'oscillateur harmonique est l'un des systèmes les plus rencontrés en physique théorique à commencer par la mécanique classique jusqu'à la théorie quantique des champs en passant par la mécanique quantique. Sa simplicité et l'intégrabilité de ses équations du mouvement font de lui un des premiers systèmes auxquels on pense afin de valider les nouvelles théories et approches. Il suffit de se rappeler des premières applications de Planck, Schrödinger et Heisenberg.

Dans ce paragraphe, nous allons attirer l'attention sur une propriété capitale de l'oscillateur harmonique à une dimension dans la représentation de Heisenberg. Ici, les opérateurs position et impulsion $(\hat{x}(t), \hat{p}(t))$ dépendent du temps et obéissent dans leurs évolutions aux équations de Heisenberg

$$\begin{array}{rcl} \frac{d\hat{x}(t)}{dt} &=& \frac{1}{i\hbar}[\hat{x}(t), \hat{H}(t)] \\ \frac{d\hat{p}(t)}{dt} &=& \frac{1}{i\hbar}[\hat{p}(t), \hat{H}(t)] \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcl} \frac{d\hat{x}(t)}{dt} &=& \frac{\hat{p}(t)}{m} \\ \frac{d\hat{p}(t)}{dt} &=& -m\omega^2\hat{x}(t) \end{array} \tag{4.1}$$

où le hamiltonien est

$$\hat{H}(t) = \frac{1}{2m}\hat{p}(t)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}(t)^2 \tag{4.2}$$

et le commutateur fondamental est

$$[\hat{x}(t), \hat{p}(t)] = \hat{x}(t)\hat{p}(t) - \hat{p}(t)\hat{x}(t) = i\hbar. \tag{4.3}$$

L'intégration de ce système est immédiate et la solution est

$$\hat{x}(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\hat{a}\, e^{-i\omega t} + \hat{a}^\dagger e^{i\omega t}\right) \quad ; \quad \hat{p}(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(-im\omega\, \hat{a}\, e^{-i\omega t} + im\omega\, \hat{a}^\dagger e^{i\omega t}) \tag{4.4}$$

où $\hat{a}$ et $\hat{a}^\dagger$ sont les constantes d'intégration devenues respectivement les opérateurs d'annihilation et de création après la quantification dans le but d'assurer l'hermicité des opérateurs $\hat{x}(t)$ et $\hat{p}(t)$, ce qui veut dire $x(t)^\dagger = \hat{x}(t)$ et $\hat{p}(t)^\dagger = \hat{p}(t)$.

Il est possible d'avoir la même solution avec le formalisme de Lagrange. En effet, le lagrangien classique de l'oscillateur harmonique est donné par

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}(t)^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 x(t)^2 \tag{4.5}$$

et l'équation d'Euler-Lagrange $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$ conduit à l'équation différentielle

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \qquad \text{sachant que} \qquad p(t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}. \tag{4.6}$$

La solution de ces deux équations sera exactement identique à la solution (4.4) des équations de Heisenberg (4.1) si on remplace les variables classiques $(x(t), p(t))$ et les constantes d'intégration par des opérateurs de telle sorte à vérifier les conditions $x(t)^\dagger = \hat{x}(t)$ et $\hat{p}(t)^\dagger = \hat{p}(t)$. Mais l'avantage d'utiliser les commutateurs réside dans la possibilité de travailler en respectant l'ordre des opérateurs.

Les expressions (4.4) peuvent être inversées par rapport aux opérateurs $\hat{a}$ et $\hat{a}^\dagger$

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}(\hat{x}(t) + i\frac{\hat{p}(t)}{m\omega})e^{i\omega t} \quad ; \quad \hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}(\hat{x}(t) - i\frac{\hat{p}(t)}{m\omega})e^{-i\omega t}. \tag{4.7}$$

A partir de la relation (4.3), on déduit que

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1, \tag{4.8}$$

en plus, si on remplace la solution (4.4) dans l'expression de notre hamiltonien, on aura

$$\hat{H}(t) = \hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right). \tag{4.9}$$

A ce stade, on peut remarquer une propriété très importante : les équations (4.4), (4.8) et (4.9) impliquent que

$$\begin{aligned}
[\hat{x}(t), \hat{H}(t)] &= \left[\sqrt{\tfrac{\hbar}{2m\omega}}\left(\hat{a}\,e^{-i\omega t} + \hat{a}^\dagger e^{i\omega t}\right)\ ,\ \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \tfrac{1}{2}\right)\right] \\
&= \hbar\omega\sqrt{\tfrac{\hbar}{2m\omega}}\left(e^{-i\omega t}\left[\hat{a}, \hat{a}^\dagger\right]\hat{a} + e^{i\omega t}\hat{a}^\dagger\left[\hat{a}^\dagger, \hat{a}\right]\right) \\
&= \hbar\omega\sqrt{\tfrac{\hbar}{2m\omega}}\left(\hat{a}e^{-i\omega t} - \hat{a}^\dagger e^{i\omega t}\right) \\
&= i^2\hbar\omega\sqrt{\tfrac{\hbar}{2m\omega}}\left(-\hat{a}e^{-i\omega t} + \hat{a}^\dagger e^{i\omega t}\right)
\end{aligned}$$

$$[\hat{x}(t), \hat{H}(t)] = i\hbar\frac{d\hat{x}(t)}{dt}. \tag{4.10}$$

Un calcul analogue avec les équations (4.4), (4.8) et (4.9) montre que

$$[\hat{p}(t), \hat{H}(t)] = i\hbar\frac{d\hat{p}(t)}{dt}. \tag{4.11}$$

A première vue, il est clair qu'il ne s'agit que des équations de Heisenberg, mais des équations qu'on a obtenues en travaillant directement avec la solution (4.4) et le commutateur (4.8). Cela veut dire que ce commutateur relatif aux opérateurs de création et d'annihilation (qui sont aussi les constantes d'intégration des équations du mouvement avant la quantification) est compatible avec les équations de Heisenberg.

Il est possible d'inverser les choses en commençant directement par la solution (4.4) qu'on peut obtenir à l'aide de l'équation d'Euler-Lagrange (4.6), ensuite l'injecter dans l'expression du hamiltonien (4.2) afin d'appliquer les équation de Heisenberg (4.1) et de déduire l'expression du commutateur (4.8) sans utiliser le commutateur fondamental (4.3). Une fois que cela est fait, il est possible d'avoir (4.3) à partir de (4.4) et (4.8). En effet, le lagrangien classique de l'oscillateur harmonique est

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}(t)^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 x(t)^2 \tag{4.12}$$

et l'équation d'Euler-Lagrange $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$ conduit à l'équation différentielle

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0. \tag{4.13}$$

La solution générale de cette équation est

$$x(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(a\, e^{-i\omega t} + be^{i\omega t}\right) \tag{4.14}$$

où a et b sont deux constantes d'intégration. Le fait que cet exemple soit simple fait que le passage au domaine quantique se fait en remplaçant a et b par des opérateurs $\hat{a}$ et $\hat{b}$ de telle sorte que $\hat{x}^\dagger = \hat{x}$, d'où la condition $\hat{b} = \hat{a}^\dagger$.

Comme $p(t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}(t)$, la solution sera identique à (4.4)

$$\hat{x}(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\hat{a}\, e^{-i\omega t} + \hat{a}^\dagger e^{i\omega t}\right) \quad ; \quad \hat{p}(t) = \sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(-i\hat{a}\, e^{-i\omega t} + i\hat{a}^\dagger e^{i\omega t}). \tag{4.15}$$

Le hamiltonien classique est $H = \frac{p^2}{2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ et son correspondant quantique sera $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$. Injectons la solution précédente dans ce dernier pour avoir $\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right)$. A ce stade, imposons à $\hat{x}(t)$ de satisfaire l'équation de Heisenberg $\dfrac{d\hat{x}(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{x}(t), \hat{H}]$ sachant que le commutateur d'un opérateur avec lui même est nul à cause de l'antisymétrie. Autrement dit, on a

$$\frac{d\hat{x}(t)}{dt} = i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2m}}\left(-\hat{a}e^{-i\omega t} + \hat{a}^\dagger e^{i\omega t}\right) \tag{4.16}$$

et

$$\frac{1}{i\hbar}[\hat{x}, \hat{H}] = \frac{1}{i\hbar}\left[\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\hat{a}\, e^{-i\omega t} + \hat{a}^\dagger e^{i\omega t}\right), \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right)\right]$$

$$\frac{1}{i\hbar}[\hat{x},\hat{H}] = -i\omega\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(e^{-i\omega t}\left[\hat{a},\hat{a}^\dagger\right]\hat{a} + e^{i\omega t}\hat{a}^\dagger\left[\hat{a}^\dagger,\hat{a}\right])$$

$$\frac{1}{i\hbar}[\hat{x},\hat{H}] = i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2m}}(-e^{-i\omega t}\left[\hat{a},\hat{a}^\dagger\right]\hat{a} + e^{i\omega t}\hat{a}^\dagger\left[\hat{a},\hat{a}^\dagger\right]). \tag{4.17}$$

L'identification directe avec l'équation (4.16) nous donne le crochet bien connu $\left[\hat{a},\hat{a}^\dagger\right] = 1$. Maintenant, à l'aide de (4.15), on peut calculer le crochet fondamental $[\hat{x},\hat{p}]$ comme suit :

$$[\hat{x},\hat{p}] = [\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\hat{a}\,e^{-i\omega t} + \hat{a}^\dagger e^{i\omega t}\right), \sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(-i\hat{a}\,e^{-i\omega t} + i\hat{a}^\dagger e^{i\omega t})] \tag{4.18}$$

$$= \frac{\hbar}{2}\left(i[\hat{a},\hat{a}^\dagger] - i[\hat{a}^\dagger,\hat{a}]\right) = i\hbar. \tag{4.19}$$

Nous avons ainsi obtenu le crochet $[\hat{x},\hat{p}] = i\hbar$ en faisant le chemin inverse, car d'habitude, ce crochet est postulé au départ ce qui est l'essence même de la quantification canonique. Dans le reste de ce chapitre, nous allons pousser les choses plus loin afin de faire de cette propriété une nouvelle approche d'étude des systèmes avec contraintes.

4.2 Propriété fondamentale des constantes d'intégration

Dans cette section, nous allons démontrer une propriété remarquable des constantes d'intégration d'un système différentiel issu des équations de Hamilton. Soit un système à N degrés de liberté dont l'état est déterminé par la connaissance à tout instant de ses variables fondamentales qui sont ses coordonnées généralisées $q = (q_1, q_2, ..., q_N)$ et ses moments conjugués $p = (p_1, p_2, ..., p_N)$. Soient maintenant $f = f(q,p)$ et $g = g(q,p)$ deux fonctions de ces variables et du temps. Dans le cas général, leur crochet est défini par

$$\{f,g\} = \sum_{i,j=1}^{N}\{q_i,q_j\}\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial q_j} + \sum_{i,j=1}^{N}\{p_i,p_j\}\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial p_j} + \sum_{i,j=1}^{N}\{q_i,p_j\}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial g}{\partial p_i}\right) \tag{4.20}$$

qui peut-être un crochet de Poisson où un crochet de Dirac, cela dépend des crochets fondamentaux $\{q_i,q_j\}$, $\{p_i,p_j\}$ et $\{q_i,p_j\}$. Ce qui importe, c'est qu'il soit antisymétrique et bilinéaire et qu'il vérifie la règle de Liebniz et l'identité de Jacobi.

A ce stade, supposons que les variables fondamentales q et p sont des fonctions du temps et de nouvelles grandeurs [1] $R = (R_1, R_2, ..., R_M)$, c'est-à-dire $q = q(R,t)$ et $p = p(R,t)$. Le

1. $M = 2N$ correspond au cas régulier. Pour les systèmes avec contraintes $M \prec 2N$, car chaque contrainte élimine une variable.

crochet (4.20) devient alors

$$\begin{aligned}\{f,g\} &= \sum_{i,j=1}^{N}\sum_{k,l=1}^{M}\{q_i,q_j\}\frac{\partial f}{\partial R_k}\frac{\partial R_k}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial R_l}\frac{\partial R_l}{\partial q_j}+\sum_{i,j=1}^{N}\sum_{k,l=1}^{M}\{p_i,p_j\}\frac{\partial f}{\partial R_k}\frac{\partial R_k}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial R_l}\frac{\partial R_l}{\partial p_j}\\ &\quad+\sum_{i,j=1}^{N}\sum_{k,l=1}^{M}\{q_i,p_j\}\left(\frac{\partial f}{\partial R_k}\frac{\partial R_k}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial R_l}\frac{\partial R_l}{\partial p_j}-\frac{\partial f}{\partial R_k}\frac{\partial R_k}{\partial q_j}\frac{\partial g}{\partial R_l}\frac{\partial R_l}{\partial p_i}\right)\\ &= \sum_{k,l=1}^{M}\Big[\sum_{i,j=1}^{N}\{q_i,q_j\}\frac{\partial R_k}{\partial q_i}\frac{\partial R_l}{\partial q_j}+\sum_{i,j=1}^{N}\{p_i,p_j\}\frac{\partial R_k}{\partial p_i}\frac{\partial R_l}{\partial p_j}\\ &\quad+\sum_{i,j=1}^{N}\{q_i,p_j\}\left(\frac{\partial R_k}{\partial q_i}\frac{\partial R_l}{\partial p_j}-\frac{\partial R_k}{\partial q_j}\frac{\partial R_l}{\partial p_i}\right)\Big]\frac{\partial f}{\partial R_k}\frac{\partial g}{\partial R_l}\end{aligned}$$

et finalement,

$$\{f,g\}=\sum_{k,l=1}^{M}\{R_k,R_l\}\frac{\partial f}{\partial R_k}\frac{\partial g}{\partial R_l}. \tag{4.21}$$

Cette propriété est valable pour n'importe quel type de crochets. En particulier,

$$\{q_i,H\}=\sum_{k,l=1}^{M}\{R_k,R_l\}\frac{\partial q_i}{\partial R_k}\frac{\partial H}{\partial R_l}\quad;\quad\{p_i,H\}=\sum_{k,l=1}^{M}\{R_k,R_l\}\frac{\partial p_i}{\partial R_k}\frac{\partial H}{\partial R_l} \tag{4.22}$$

où H est le hamiltonien du système.

On a aussi

$$\frac{dq_i}{dt}=\sum_{k=1}^{M}\frac{\partial q_i}{\partial R_k}\frac{dR_k}{dt}+\frac{\partial q_i}{\partial t}\quad;\quad\frac{dp_i}{dt}=\sum_{k=1}^{M}\frac{\partial p_i}{\partial R_k}\frac{dR_k}{dt}+\frac{\partial p_i}{\partial t}. \tag{4.23}$$

A présent, injectons les relations (4.22) et (4.23) dans les équations de Hamilton $\frac{dq_i}{dt}=\{q_i,H\}$ et $\frac{dp_i}{dt}=\{p_i,H\}$ afin d'aboutir aux équations

$$\sum_{k=1}^{M}\frac{\partial q_i}{\partial R_k}\frac{dR_k}{dt}+\frac{\partial q_i}{\partial t}=\sum_{k,l=1}^{M}\{R_k,R_l\}\frac{\partial q_i}{\partial R_k}\frac{\partial H}{\partial R_l}\qquad i=1...N \tag{4.24}$$

$$\sum_{k=1}^{M}\frac{\partial p_i}{\partial R_k}\frac{dR_k}{dt}+\frac{\partial p_i}{\partial t}=\sum_{k,l=1}^{M}\{R_k,R_l\}\frac{\partial p_i}{\partial R_k}\frac{\partial H}{\partial R_l}\qquad i=1...N. \tag{4.25}$$

Supposons maintenant que les R_k, $k=1...M$ coïncident avec les constantes d'intégration, ce qui veut dire que $\frac{dR_k}{dt}=0$, $k=1...M$. Dans ce cas, posons $R_k=C_k$, $k=1...M$, et les équations précédentes vont se réduire à la forme

$$\frac{\partial q_i}{\partial t}=\sum_{k,l=1}^{M}\{C_k,C_l\}\frac{\partial q_i}{\partial C_k}\frac{\partial H}{\partial C_l}\quad;\quad\frac{\partial p_i}{\partial t}=\sum_{k,l=1}^{M}\{C_k,C_l\}\frac{\partial p_i}{\partial C_k}\frac{\partial H}{\partial C_l}\qquad i=1...N. \tag{4.26}$$

Partant des crochets définis à l'aide des variables fondamentales, nous avons pû faire le lien avec les constantes d'intégration et cela sans préciser s'il s'agit de crochets de Poisson ou de Dirac. Dans la suite, cette propriété va constituer le fondement de la méthode des constantes d'intégration applicable à la fois aux systèmes réguliers et singuliers.

4.3 Méthode des constantes d'intégration (CI)

Dans cette section, nous allons inverser le raisonnement précédent en utilisant le résultat (4.26) afin de construire une nouvelle approche de détermination des crochets relatifs aux systèmes exactement solubles. Soit un système décrit classiquement par un lagrangien autonome $L(q,\dot{q})$, où $q = (q_1, q_2, ..., q_N)$ représentent les coordonnées généralisées, $\dot{q} = (\dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_N)$ les vitesses généralisées et N le nombre de ses degrés de liberté. L'état de ce dernier est régi par les équations d'Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad i = 1...N \tag{4.27}$$

où les moments conjugués sont définis par

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}(q,\dot{q},t) \qquad i = 1...N. \tag{4.28}$$

Supposons que nous disposons de la solution générale de ces équations

$$\begin{array}{lll} q(t) = \tilde{q}(t,C) & \Leftrightarrow & q_i(t) = \tilde{q}_i(t,C) \\ p(t) = \tilde{p}(t,C) & \Leftrightarrow & p_i(t) = \tilde{p}_i(t,C) \end{array} \qquad i = 1...N \tag{4.29}$$

où $C = (C_1, C_2, ..., C_M)$ est l'ensemble des M constantes d'intégration de nos N équations différentielles (4.27) de deuxième degré (s'il n'y a pas de contraintes, $M = 2N$). On peut inverser ces expressions par rapport aux constantes C pour aboutir à des relations du type

$$C = \tilde{C}(t, q(t), p(t)) \Leftrightarrow C_l = \tilde{C}_l(t, q(t), p(t)) \qquad l = 1...M. \tag{4.30}$$

Avant d'aller plus loin, il faut distinguer deux cas : le premier, c'est lorsqu'il n'y a pas de fonctions arbitraires dans la solution (pas de symétrie de jauge), le deuxième est le cas contraire. Dans ce dernier cas, il faut d'abord choisir les fonctions arbitraires une bonne fois pour toute, en ajoutant de nouvelles conditions (fixer la jauge) avant de passer au formalisme hamiltonien et d'introduire un quelconque crochet.

Maintenant, le hamiltonien H peut-être exprimé en fonction des $C = (C_1, C_2, ..., C_M)$ en utilisant (4.29) directement

$$H = \sum_{i=1}^{N} \tilde{p}_i(t,C)\dot{\tilde{q}}_i(t,C) - L(\tilde{q}(t,C), \dot{\tilde{q}}(t,C)) = H(C). \tag{4.31}$$

La méthode des constantes d'intégration (CI) consiste à utiliser la propriété (4.26) pour calculer les crochets relatifs aux constantes d'intégrations ($\{C_i, C_j\}$, $i,j = 1...2N$). Autrement dit, à l'aide des équations de Hamilton

$$\begin{array}{lll} \frac{\partial}{\partial t}\tilde{q}_i(t,C) = & \{\tilde{q}_i(t,C)\ ,\ H(C)\} & i = 1...N \\ \frac{\partial}{\partial t}\tilde{p}_i(t,C) = & \{\tilde{p}_i(t,C)\ ,\ H(C)\} & i = 1...N \end{array} \tag{4.32}$$

qu'on peut réécrire sous la forme

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial}{\partial t}\tilde{q}_i(t,C) = & \sum_{k,l=1}^{M}\{C_k,C_l\}\frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial C_k}\frac{\partial H}{\partial C_l} \qquad i=1...N \\ \frac{\partial}{\partial t}\tilde{p}_i(t,C) = & \sum_{k,l=1}^{M}\{C_k,C_l\}\frac{\partial \tilde{p}_i}{\partial C_k}\frac{\partial H}{\partial C_l} \qquad i=1...N. \end{array} \tag{4.33}$$

Ces $2N$ équations contiennent en principe $M(M-1)/2$ crochets inconnus en plus des M crochets $\{C_k, C_k\}$ qui sont nuls et des autres qu'on peut obtenir par antisymétrie. Pour les déterminer, il faut procéder par identification des termes des membres de droite avec ceux des membres de gauche et on s'attend à ce que ces crochets ne dépendent pas du temps car il s'agit de crochets entre des constantes. Pour s'assurer de faire une identification juste, il ne faut pas perdre de vue que ces équations doivent être vérifiées quel que soit le temps t et quelles que soient les valeurs des constantes d'intégration $C_k, k = 1...M$ car elles sont complètement indépendantes.

Mais, avec cette procédure, seuls les crochets qui contiennent au moins une constante d'intégration figurant dans l'expression de $H(C)$ sont accessibles. Pour résoudre ce problème, il suffit d'ajouter au lagrangien des termes supplémentaires multipliés par des coefficients, de refaire toute la procédure de telle sorte à avoir à disposition tous les crochets des constantes d'intégration, et ensuite d'annuler ces coefficients. Autrement dit, si par exemple le crochet $\{C_j, C_k\}$ n'est pas accessible et si l'une de ces constantes apparait dans l'expression de la coordonnée généralisée q_i, il serait très prometteur d'ajouter au lagrangien un terme de la forme ηq_i et refaire tous les calculs pour poser $\eta = 0$ à la fin. Maintenant, il suffit d'utiliser ces crochets et les expressions (4.29) pour déduire les crochets relatifs aux variables fondamentales (q, p). Une fois que cela est fait, nous pouvons quantifier notre système canoniquement en introduisant des opérateurs $\hat{q}$ et $\hat{p}$ tels que le commutateur de deux fonctions de ces opérateurs $f(\hat{q}, \hat{p})$ et $g(\hat{q}, \hat{p})$ soit

$$[f(\hat{q},\hat{p}), g(\hat{q},\hat{p})] = i\hbar\widehat{\{f(q,p), g(q,p)\}}. \tag{4.34}$$

Pour récapituler, notre méthode consiste premièrement à résoudre les équations d'Euler-Lagrange de notre système et d'en déduire les moments conjugués, ensuite à remplacer la solution générale dans l'expression du hamiltonien et à imposer à cette solution de vérifier les équations de Hamilton écrites à l'aide de crochets de constantes d'intégration, ce qui va nous permettre d'avoir ces crochets par identification et de les utiliser pour déduire les crochets fondamentaux. La dernière étape est la quantification canonique de notre système.

Bien que notre approche (appelée dans le reste de ce manuscrit la méthode CI) n'est applicable qu'aux systèmes classiquement solubles, elle est directe, simple et sans formalisme approprié, elle ne demande que la maitrise des méthodes de la mécanique analytique. D'ailleurs, on en parle même pas de contraintes et d'algorithme itératif pour les déterminer, contrairement à Dirac et Faddeev-Jackiw. En effet, la solution générale contient tout, car le nombre de constantes d'intégrations indépendantes nous renseigne sur les contraintes de deuxième classe, et la présence de fonctions arbitraires dans la solution sur la symétrie de jauge et les contraintes de première classe, sans avoir besoin d'une classification des contraintes comme le fait Dirac.

Mais, il est possible de nous reprocher à première vue le fait que notre approche nécessite la solution générale contrairement aux deux autres approches. C'est vrai qu'avec les méthodes de Dirac et Faddeev-Jackiw, il est possible d'avoir les crochets sans avoir besoin de résoudre les équations du mouvement. Cependant, une fois que le système est quantifié, il faut quand même résoudre les équations de Heisenberg, or pratiquement, tous les systèmes physiques à part les systèmes libres n'ont pas de solutions analytiques, d'où le besoin de faire appel à la théorie des perturbations. Ce que nous proposons dans notre approche est d'utiliser la solution libre qui est accessible pour quantifier à l'aide des constantes d'intégration, ensuite d'introduire un développement perturbatif pour déterminer la correction sur les crochets. Dans les deux cas, cela revient à la même chose, car avoir les crochets exactes ne sert pas à grand-chose quand on n'a pas la solution exacte, et dans le cas contraire, la méthode des constantes d'intégration peut nous donner les crochets exacts. L'essentiel, c'est que les différentes approches quand elles sont applicables aboutissent aux mêmes résultats .

Nous allons terminer cette section par l'exemple du lagrangien régulier autonome $L = \frac{1}{2}m\dot{x}(t)^2$ qui décrit une particule libre de masse m se déplaçant à une dimension. L'équation d'Euler-Lagrange $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$ nous donne l'équation du mouvement $\frac{d^2x}{dt^2} = 0$, dont la solution générale est

$$x(t) = a\ t + b \tag{4.35}$$

où a et d sont les constantes d'intégrations. Le moment conjugué se calcule à l'aide de la définition $p(t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$, d'où

$$p(t) = m\dot{x}(t) = ma \tag{4.36}$$

que nous remplaçons dans l'expression du hamiltonien de notre particule

$$H = \frac{1}{2m}p^2 = \frac{m}{2}a^2. \tag{4.37}$$

Maintenant, il suffit juste d'utiliser l'équation $\frac{dx(t)}{dt} = \{x(t), H\}$ sous la forme (4.33) afin d'avoir le crochet $\{a, b\}$. En effet, d'après (4.35) et (4.37)

$$\begin{array}{rcl} \frac{dx(t)}{dt} = \{x(t), H\} & \Rightarrow & \frac{\partial x}{\partial t} = \{a, b\}\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial H}{\partial b} + \{b, a\}\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial H}{\partial a} \\ & \Rightarrow & a = \{b, a\}ma \end{array}$$

d'où

$$\{b, a\} = \frac{1}{m}. \tag{4.38}$$

On vient d'aboutir au crochet $\{b, a\}$ directement à partir des équations du mouvement et de la relation (4.33) et surtout sans utiliser le crochet fondamental $\{x, p\}$. On peut maintenant se servir de ce résultat pour le calculer sachant que $\{x, x\} = \{p, p\} = 0$. D'après (4.35) et (4.36), on déduit

$$\{x, p\} = \{at + b, ma\} = mt\{a, a\} + m\{b, a\} = 0 + m(\frac{1}{m}) = 1 \tag{4.39}$$

qui est le bon crochet de Poisson relatif aux variables fondamentales x et p obtenu en utilisant les constantes d'intégration de la solution générale.

Un autre exemple sera la particule amortie décrite par le lagrangien régulier non autonome $L = \frac{1}{2}m\ e^{\frac{\alpha}{m}t}\dot{x}(t)^2$. Le mouvement est régi par l'équation différentielle $\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} = 0$ dont la solution générale est

$$x(t) = ae^{-\frac{\alpha}{m}t} + b \qquad\qquad p(t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = -a\alpha. \tag{4.40}$$

Remplaçons dans le hamiltonien du système $H = \frac{1}{2m}e^{-\frac{\alpha}{m}t}\ p(t)^2$, pour avoir l'expression

$$H = \frac{\alpha^2}{2m}a^2e^{-\frac{\alpha}{m}t}. \tag{4.41}$$

Utilisons maintenant l'équation $\frac{dx(t)}{dt} = \{x(t), H\}$ pour déterminer le crochet $\{a, b\}$ à l'aide de (4.40) et (4.41) comme suit :

$$\begin{aligned} -a\tfrac{\alpha}{m}e^{-\frac{\alpha}{m}t} &= \{a,b\}\tfrac{\partial x}{\partial a}\tfrac{\partial H}{\partial b} + \{b,a\}\tfrac{\partial x}{\partial b}\tfrac{\partial H}{\partial a} \\ &= \tfrac{\alpha^2}{m}e^{-\frac{\alpha}{m}t}a\{b,a\}. \end{aligned}$$

Par identification membre à membre, on obtient le crochet $\{a, b\} = \frac{1}{\alpha}$. Un calcul simple montre que ce résultat implique que $\{x, p_x\} = 1$, car

$$\{x, p_x\} = \{ae^{-\frac{\alpha}{m}t} + b, -a\alpha\} = \{b, -a\alpha\} = \alpha\{a, b\} = \alpha(\frac{1}{\alpha}) = 1. \tag{4.42}$$

4.4 Choix des constantes d'intégration

Notre approche (CI) repose entièrement sur la connaissance de la solution générale $\tilde{q}_i(t, C)$ et $\tilde{p}_i(t, C)$ avec toutes les constantes d'intégration indépendantes $C_k, k = 1...M$. Or, il est bien connu que ces constantes peuvent toujours être redéfinies, ce qui veut dire choisies autrement. Mais rien n'empêche que notre approche reste valable car la propriété (4.33) qui en est le fondement, est démontrée d'une façon générale sans restriction sur le choix des constantes. Autrement dit, les relations

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial}{\partial t}\tilde{q}_i(t, C) = &\quad \textstyle\sum_{k,l=1}^{M}\{C_k, C_l\}\tfrac{\partial \tilde{q}_i}{\partial C_k}\tfrac{\partial H}{\partial C_l} \qquad i = 1...N \\ \tfrac{\partial}{\partial t}\tilde{p}_i(t, C) = &\quad \textstyle\sum_{k,l=1}^{M}\{C_k, C_l\}\tfrac{\partial \tilde{p}_i}{\partial C_k}\tfrac{\partial H}{\partial C_l} \qquad i = 1...N \end{aligned} \tag{4.43}$$

sont vérifiées quelque soit le choix des constante $C_k, k = 1...M$. D'après (4.21), la même chose peut-être dite du crochet

$$\{f, g\} = \sum_{k,l=1}^{M}\{C_k, C_l\}\frac{\partial f}{\partial C_k}\frac{\partial g}{\partial C_l}. \tag{4.44}$$

Maintenant, redéfinissons les constantes $C_k, k = 1...M$ par les relations $C_k = \tilde{C}_k(D)$ où les $D = (D_1, .., D_M)$ représentent les nouvelles constantes. Les relations inverses $D_k = \tilde{D}_k(C)$ vont nous permettre de calculer le crochet

$$\{D_{k'}, D_{l'}\} = \sum_{k,l=1}^{M} \{C_k, C_l\} \frac{\partial D_{k'}}{\partial C_k} \frac{\partial D_{l'}}{\partial C_l} \tag{4.45}$$

ce qui montre qu'en principe, les crochets des nouvelles constantes diffèrent de ceux des constantes du départ. Néanmoins, pour deux fonctions de l'espace des phases f et g, le crochet $\{f, g\}$ est indépendant du choix des constantes d'intégration. D'après (4.44), on a

$$\begin{aligned}
\{f, g\} &= \sum_{k,l=1}^{M} \{C_k, C_l\} \tfrac{\partial f}{\partial C_k} \tfrac{\partial g}{\partial C_l} = \sum_{k,l=1}^{M} \sum_{k',l'=1}^{M} \{C_k, C_l\} \tfrac{\partial f}{\partial D_{k'}} \tfrac{\partial D_{k'}}{\partial C_k} \tfrac{\partial g}{\partial D_{l'}} \tfrac{\partial D_{l'}}{\partial C_l} \\
&= \sum_{k',l'=1}^{M} \left(\sum_{k,l=1}^{M} \{C_k, C_l\} \tfrac{\partial D_{k'}}{\partial C_k} \tfrac{\partial D_{l'}}{\partial C_l} \right) \tfrac{\partial f}{\partial D_{k'}} \tfrac{\partial g}{\partial D_{l'}} \\
\{f, g\} &= \sum_{k',l'=1}^{M} \{D_{k\prime}, D_{l'}\} \frac{\partial f}{\partial D_{k'}} \frac{\partial g}{\partial D_{l'}}.
\end{aligned} \tag{4.46}$$

Nous voyons bien que le crochet se calcule de la même manière que ce soit avec les $C_k, k = 1...M$ ou avec les $D_k, k = 1...M$, et en particulier, la redéfinition des constantes n'affecte pas les crochets des variables fondamentales q et p. De la même manière, on démontre que les relations (4.43) auront la même forme, c'est à dire

$$\begin{aligned}
\tfrac{\partial}{\partial t} \breve{q}_i(t, D) &= \sum_{k,l=1}^{M} \{D_k, D_l\} \tfrac{\partial \breve{q}_i}{\partial D_k} \tfrac{\partial H}{\partial D_l} \qquad i = 1...N \\
\tfrac{\partial}{\partial t} \breve{p}_i(t, D) &= \sum_{k,l=1}^{M} \{D_k, D_l\} \tfrac{\partial \breve{p}_i}{\partial D_k} \tfrac{\partial H}{\partial D_l} \qquad i = 1...N
\end{aligned} \tag{4.47}$$

où $\breve{q}_i(t, D) = \tilde{q}_i(t, \tilde{C}(D))$ et $\breve{p}_i(t, C) = \tilde{p}_i(t, \tilde{C}(D)), i = 1...N$.

Revenons au cas de l'exemple d'une particule libre étudiée fin de la section précédente. Soient c et d les nouvelles constantes liées aux anciennes constantes a et b par les relations

$$a = cd \qquad\qquad b = e^c + \sin(d) + 1 \tag{4.48}$$

où $e^c = \exp(c)$. A partir de (4.35) et (4.36) on aura

$$x(t) = cd\ t + e^c + \sin(d) + 1\ ;\ p(t) = m\ cd \quad \Rightarrow \quad H = \frac{m\ c^2 d^2}{2}. \tag{4.49}$$

Pour calculer le crochet $\{c, d\}$, utilisons l'équation $\frac{dx(t)}{dt} = \{x(t), H\}$ avec la solution précédente :

$$\begin{aligned}
\tfrac{\partial x}{\partial t} = \{c, d\} \tfrac{\partial x}{\partial c} \tfrac{\partial H}{\partial d} + \{d, c\} \tfrac{\partial x}{\partial d} \tfrac{\partial H}{\partial c} & \\
\Rightarrow cd &= \{c, d\}(d\ t + e^c)(mc^2 d) + \{d, c\}(ct + \cos(d))(mcd^2) \\
\Rightarrow cd &= \{c, d\}\ (mc^2 e^c d - mc \cos(d) d^2) \\
\Rightarrow cd &= cd\ m\ (ce^c - d\cos(d))\ \{c, d\}
\end{aligned}$$

$$\{c,d\} = \frac{1}{m}\frac{1}{ce^c - d\cos(d)}. \tag{4.50}$$

Ce crochet est compatible avec la transformation (4.48) car, d'après (4.38),

$$\begin{aligned} \{a,b\} = -\tfrac{1}{m} &\Rightarrow \{c,d\}\tfrac{\partial a}{\partial c}\tfrac{\partial b}{\partial d} + \{d,c\}\tfrac{\partial a}{\partial d}\tfrac{\partial b}{\partial c} = -\tfrac{1}{m} \\ &\Rightarrow \{c,d\}\left(d\cos(d) - ce^c\right) = -\tfrac{1}{m} \\ &\Rightarrow \{c,d\} = \tfrac{1}{m}\tfrac{1}{ce^c - d\cos(d)}. \end{aligned}$$

On peut s'en servir pour vérifier que le crochet fondamental $\{x,p\} = 1$. En effet, d'après (4.49) on déduit

$$\begin{aligned} \{x,p\} &= \{c,d\}\tfrac{\partial x}{\partial c}\tfrac{\partial p}{\partial d} + \{d,c\}\tfrac{\partial x}{\partial d}\tfrac{\partial p}{\partial c} \\ &= \{c,d\}\left(\left(d\ t + e^c\right)\ mc - \left(c\ t + \cos\left(d\right)\right)\ md\right) \\ &= \left(\tfrac{1}{m}\tfrac{1}{ce^c - d\cos(d)}\right)\left(mce^c - md\cos(d)\right) = 1. \end{aligned}$$

Sur cet exemple, il est facile de faire le lien entre le choix des constantes d'intégration et les valeurs de $x(t)$ et $p(t)$ à un instant $t = 0$. Par exemple, le choix $x(t) = at + b$ et $p(t) = ma$ peut découler des conditions $x(0) = b$ et $p(0) = ma$. De même, le choix de $x(t) = cd\ t + e^c + \sin(d) + 1$ et $p(t) = mcd$, peut résulter des conditions $x(0) = e^c + \sin(d) + 1$ et $p(0) = mcd$. D'une manière générale, quand c'est nécessaire, il est toujours possible de lier le choix des constantes d'intégration à des conditions sur les coordonnées et moments conjugués qui doivent être vérifiées à un instant donné.

Dans le cas d'un lagrangien singulier $L(q,\dot{q})$ décrivant un système de N degrés de liberté, le nombre de constantes d'intégration est inférieur au nombre des coordonnées et des moments conjugués pris ensemble ($M \prec 2N$) car la présence de contraintes fait que certaines variables fondamentales sont liées entre elles. Du coup, seulement M conditions sur ces constantes sont suffisantes pour les bien choisir et les autres seront des conséquences de celles-ci. Par exemple, examinons le cas du lagrangien $L = \frac{\dot{x}^2}{2} + y\dot{x} - xy$ où on va essayer de choisir nos constantes d'intégration $\{a,b,c,d\}$ telles que

$$x(0) = a \qquad y(0) = b \qquad p_x(0) = c \qquad p_y(0) = d. \tag{4.51}$$

Les équations du mouvement sont $\ddot{x} + \dot{y} = -y$ et $\dot{x} - x = 0$, dont la solution générale est

$$\begin{array}{ll} x(t) = Ae^t & y(t) = -\frac{A}{2}e^t + Be^{-t} \\ p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{A}{2}e^t + Be^{-t} & p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = 0 \end{array} \tag{4.52}$$

sachant que A et B sont deux constantes d'intégration, ce qui veut dire qu'on manque à priori de deux constantes pour satisfaire le choix (4.51). Pour avoir $x(0) = a$ et $y(0) = b$, il suffit que $A = a$ et $B = \frac{a}{2} + b$, d'où

$$x(t) = ae^t \qquad y(t) = \tfrac{a}{2}\left(e^{-t} - e^t\right) + be^{-t} \tag{4.53}$$

mais cela implique aussi que

$$p_x = \tfrac{a}{2}\left(e^t + e^{-t}\right) + be^{-t} \qquad p_y = 0. \tag{4.54}$$

Il en résulte que $p_x(0) = a+b$ et $p_y(0) = 0$. Après comparaison avec (4.51), on constate qu'il faut que $c = a + b$ et $d = 0$, ce qui veut dire que nous sommes libres de choisir uniquement deux constantes et les deux autres en découlent. Cela est dû au fait que notre lagrangien possède les deux contraintes $p_x = x + y$ et $p_y = 0$, d'où les restrictions $p_x(0) = x(0) + y(0)$ et $p_y(0) = 0$.

4.5 Applications aux systèmes réguliers

Dans ce qui suit, nous allons donner des exemples qui illustrent bien notre approche afin de vérifier sa validité sur des systèmes réguliers déjà connus en physique théorique.

4.5.1 Oscillateurs harmonique et isotonique

Comme on vient de le voir dans la première section, le lagrangien de l'oscillateur harmonique à une dimension est donné par $L = \frac{1}{2}m\ (\dot{x}(t)^2 - \omega^2 x(t)^2)$, d'où l'équation du mouvement $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ et le moment conjugué $p(t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\,\dot{x}(t)$. La solution générale s'écrit

$$\begin{array}{rl} x(t) = & a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t) \\ p(t) = & m\omega(-a\sin(\omega t) + b\cos(\omega t)) \end{array} \tag{4.55}$$

où a et b sont des constantes d'intégration. Remplaçons cette solution dans le hamiltonien du système $H = \frac{1}{2m}p(t)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x(t)^2$ pour avoir après simplification

$$H = \frac{1}{2}m\omega^2(a^2 + b^2). \tag{4.56}$$

Utilisons l'équation $\frac{dx(t)}{dt} = \{x(t), H\}$ pour calculer le crochet $\{a, b\}$.

$$\begin{aligned} -a\omega\sin(\omega t) + b\omega\cos(\omega t) &= \{a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)\ ,\ \tfrac{1}{2}m\omega^2(a^2 + b^2)\} \\ &= \tfrac{1}{2}m\omega^2(\cos(\omega t)\{a, b^2\} + \sin(\omega t)\{b, a^2\}) \\ &= m\omega^2\left(b\cos(\omega t)\{a, b\} - a\sin(\omega t)\{a, b\}\right). \end{aligned}$$

Par identification membre à membre, on obtient $\{a, b\} = \frac{1}{m\omega}$. On peut vérifier facilement que $\{x, p_x\} = 1$ comme suit :

$$\begin{aligned} \{x, p_x\} &= \{a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)\ ,\ m\omega(-a\sin(\omega t) + b\cos(\omega t))\} \\ &= m\omega\cos^2(\omega t)\{a, b\} - m\omega\sin^2(\omega t)\{b, a\} \\ &= m\omega\left(\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)\right)\{a, b\} = m\omega\cdot\tfrac{1}{m\omega} = 1. \end{aligned}$$

Nous allons essayer d'appliquer notre approche dans le cas d'un oscillateur isotonique décrit par le Lagrangien régulier $L = \frac{1}{2}\dot{x}^2 - \frac{1}{2}\omega^2 x^2 - \frac{k}{x^2}$. L'équation d'Euler-Lagrange $\ddot{x} + \omega^2 x - \frac{2k}{x^3} = 0$ est non linéaire et d'après [98] sa solution générale est

$$\begin{array}{r} x(t) = \frac{1}{A\omega}\sqrt{(A^4\omega^2 - 2k)\sin^2(wt + \phi) + 2k} \\ p_x(t) = \dot{x}(t) = \frac{(A^4\omega^2 - 2k)\sin(wt+\phi)\cos(wt+\phi)}{A\sqrt{(A^4\omega^2 - 2k)\sin^2(wt+\phi)+2k}} \end{array} \tag{4.57}$$

où A et ϕ sont les constantes d'intégration. Injectons cette solution dans le hamiltonien $H = \frac{1}{2}p_x^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2 + \frac{k}{x^2}$ afin de l'exprimer en fonction de A et ϕ. Après simplilications on arrive à

$$H = \frac{A^4\omega^2 + 2k}{2A^2}. \tag{4.58}$$

En utilisant l'équation de Hamilton $\dot{x} = \{x, H\}$ et la propriété (4.33) on aura

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \{A, \phi\}\frac{\partial x}{\partial A}\frac{\partial H}{\partial \phi} + \{\phi, A\}\frac{\partial x}{\partial \phi}\frac{\partial H}{\partial A} \tag{4.59}$$

d'où $\frac{\partial x}{\partial t} = \{\phi, A\}\frac{\partial x}{\partial \phi}\frac{\partial H}{\partial A}$. On aura ainsi le crochet $\{\phi, A\} = \frac{\partial x}{\partial t}/\left(\frac{\partial x}{\partial \phi}\frac{\partial H}{\partial A}\right) = \frac{A^3\omega}{A^4\omega^2 - 2k}$. Maintenant il est possible de déterminer le crochet fondamental $\{x, p_x\}$ à l'aide de la relation (4.21) comme suit :

$$\{x, p_x\} = \{A, \phi\}\frac{\partial x}{\partial A}\frac{\partial p_x}{\partial \phi} + \{\phi, A\}\frac{\partial x}{\partial \phi}\frac{\partial p_x}{\partial A} = \frac{A^3\omega}{A^4\omega^2 - 2k}\left(-\frac{\partial x}{\partial A}\frac{\partial p_x}{\partial \phi} + \frac{\partial x}{\partial \phi}\frac{\partial p_x}{\partial A}\right).$$

Un calcul un peu long montre que $-\frac{\partial x}{\partial A}\frac{\partial p_x}{\partial \phi} + \frac{\partial x}{\partial \phi}\frac{\partial p_x}{\partial A} = \frac{A^4\omega^2 - 2k}{A^3\omega}$, d'où le résultat $\{x, p_x\} = 1$ qui n'est rien d'autre que le crochet de Poisson bien connu quand le lagrangien est régulier (sans contraintes).

4.5.2 Particule dans un champ électrique constant

Soit une particule de masse m et charge q_e se déplaçant à deux dimensions sous l'influence d'un champ électrique $\vec{E} = E_0\vec{j}$. Le lagrangien dans ce cas est $L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - q_eE_0y$, et les équations du mouvement sont $\ddot{x} = 0$ et $\ddot{y} = -\frac{q_eE_0}{m}$. Après intégration immédiate, on aura

$$\begin{array}{ll} x(t) = at + b & y(t) = -\frac{q_eE_0}{2m}t^2 + ct + d \\ p_x(t) = ma & p_y(t) = -q_eE_0t + mc \end{array} \tag{4.60}$$

où a, b, c et d sont les constantes d'intégration. Le hamiltonien $H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2) + q_eE_0y$ s'exprime en fonction de la solution précédente sous la forme

$$H = \frac{1}{2}m(a^2 + c^2) + q_eE_0d. \tag{4.61}$$

Les équations du mouvement $\frac{dx_i(t)}{dt} = \{x_i(t), H\}$, $i = 1, 2$ impliquent

$$a = mt\{a, c\}c + q_eE_0t\{a, d\} + m\{b, a\}a + m\{b, c\}c + q_eE_0\{b, d\}$$
$$-\frac{q_eE_0}{m}t + c = mt\{c, a\}a + q_eE_0t\{c, d\} + m\{d, a\}a + m\{d, c\}c.$$

Par identification membre à membre, on en déduit que les seuls crochets non nuls sont $\{b, a\} = \frac{1}{m}$ et $\{d, c\} = \frac{1}{m}$. A l'aide de ce résultat et de la solution (4.60), un calcul simple montre que $\{x, y\} = \{p_x, p_y\} = 0$, $\{x, p_y\} = \{p_x, y\} = 0$ et $\{x, p_x\} = \{y, p_y\} = 1$. Ce sont les crochets fondamentaux obtenus avec notre méthode sans utiliser la définition des crochets de Poisson.

4.5.3 Particule dans un champ magnétique constant

En présence d'un champ magnétique constant $\vec{B} = B_0\vec{k}$, le lagrangien d'une particule de masse m et charge q_e est $L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)-\frac{1}{2}q_eB_0(y\dot{x}-x\dot{y})$ où on a choisi le potentiel vecteur $\vec{A} = \frac{B_0}{2}(-y\vec{i}+x\vec{j})$. Les équations du mouvement seront alors $\ddot{x} = \frac{q_eB_0}{m}\dot{y}$ et $\ddot{y} = -\frac{q_eB_0}{m}\dot{x}$, sachant que leur solution est donnée par

$$\begin{aligned} x(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t) + c \quad ; \quad y(t) = -a\sin(\omega t) + b\cos(\omega t) + d \\ p_x(t) = \tfrac{1}{2}m\omega(-a\sin(\omega t) + b\cos(\omega t) - d) \\ p_y(t) = -\tfrac{1}{2}m\omega(a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t) - c) \end{aligned} \tag{4.62}$$

où $\omega = \frac{q_eB_0}{m}$ et a, b, c et d sont les constantes d'intégration. Remplaçons cette solution dans le hamiltonien de notre système

$$H = \frac{1}{2m}(\vec{p}-q_e\vec{A})^2 = \frac{1}{2m}\left(p_x^2+p_y^2+q_eB_0(yp_x-xp_y)+q_e^2\frac{B_0^2}{4}(x^2+y^2)\right) \tag{4.63}$$

pour avoir

$$H = \frac{1}{2}m\omega^2(a^2+b^2). \tag{4.64}$$

Comme H ne dépend que a et b, on ne pourra pas donc avoir le crochet $\{c,d\}$ avec notre méthode. Pour y remédier, on va tout refaire avec le nouveau lagrangien $L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}m\omega(y\dot{x}-x\dot{y}) - \eta m\omega\, x$, $(\omega = \frac{q_eB_0}{m})$, ensuite on va poser $\eta = 0$ pour retrouver notre exemple. Le choix du terme $\eta m\omega\, x$ est dû au fait que dans la solution précédente x dépend de la constante c. Les équations du mouvement seront maintenant $\ddot{x} = \omega\dot{y} - \eta\omega$ et $\ddot{y} = -\omega\dot{x}$ et la solution générale

$$\begin{aligned} x(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t) + c \quad ; \quad y(t) = -a\sin(\omega t) + b\cos(\omega t) + \eta t + d \\ p_x(t) = \tfrac{1}{2}m\omega(-a\sin(\omega t) + b\cos(\omega t) - \eta t - d) \\ p_y(t) = -\tfrac{1}{2}m\omega(a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t) + \tfrac{2\eta}{\omega} - c). \end{aligned} \tag{4.65}$$

Dans ce cas $H = \frac{1}{2m}\left(p_x^2+p_y^2+q_eB_0(yp_x-xp_y)+q_e^2\frac{B_0^2}{4}(x^2+y^2)\right) + \eta m\omega\, x$ et il s'exprime en fonction de cette solution sous la forme

$$H = \frac{1}{2}m\omega^2(a^2+b^2) + \eta m\omega\, c + m\frac{\eta^2}{2}. \tag{4.66}$$

Avant d'aller plus loin, on remarque qu'il suffit de poser $\eta = 0$ pour retrouver la solution et le hamiltonien précédents. Avec les équations de Hamilton $\frac{dx_i(t)}{dt} = \{x_i(t), H\}$, $i = 1, 2$,

il est possible de déterminer les différents crochets relatifs aux constantes a, b, c et d.

$$\begin{aligned}
\omega(-a\sin(\omega t)+b\cos(\omega t)) &= m\omega^2\cos(\omega t)b\{a,b\}+\eta m\omega\cos(\omega t)\{a,c\}\\
&\quad +m\omega^2\sin(\omega t)a\{b,a\}+\eta m\omega\sin(\omega t)\{b,c\}\\
&\quad +m\omega^2 a\{c,a\}+m\omega^2 b\{c,b\}\\
\omega(-a\cos(\omega t)-b\sin(\omega t))+\eta &= -m\omega^2\sin(\omega t)b\{a,b\}-\eta m\omega\sin(\omega t)\{a,c\}\\
&\quad +m\omega^2\cos(\omega t)a\{b,a\}+\eta m\omega\cos(\omega t)\{b,c\}\\
&\quad +m\omega^2 a\{d,a\}+m\omega^2 b\{d,b\}+\eta m\omega\{d,c\}.
\end{aligned}$$

Par identification, on conclut que les seuls crochets non nuls sont $\{a,b\}=\frac{1}{m\omega}$ et $\{c,d\}=-\frac{1}{m\omega}$. Ces derniers ne dépendent pas de η, donc ils restent inchangés si on pose $\eta=0$, ce qui veut dire qu'ils sont aussi les crochets relatifs au lagrangien du départ. Un calcul trivial à l'aide de ce résultat montre que $\{x,y\}=\{p_x,p_y\}=0$, $\{x,p_y\}=\{p_x,y\}=0$ et $\{x,p_x\}=\{y,p_y\}=1$. Par exemple, on va déterminer le crochet $\{x,y\}$ à partir de (4.62).

$$\begin{aligned}
\{x,y\} &= \{a\cos(\omega t)+b\sin(\omega t)+c,-a\sin(\omega t)+b\cos(\omega t)+d\}\\
&= \{a,b\}\cos^2(\omega t)+\{a,d\}\cos(\omega t)-\{b,a\}\sin^2(\omega t)\\
&\quad +\{b,d\}\sin(\omega t)-\{c,a\}\sin(\omega t)+\{c,b\}\cos(\omega t)+\{c,d\}\\
&= \tfrac{1}{m\omega}\cos^2(\omega t)-(-\tfrac{1}{m\omega})\sin^2(\omega t)+(-\tfrac{1}{m\omega})=0.
\end{aligned}$$

Il est même possible de vérifier que les vitesses ne commutent pas, propriété connue en présence d'un champ magnétique, en utilisant les premières relations de (4.62)

$$\begin{aligned}
\{\dot{x},\dot{y}\} &= \{-a\omega\sin(\omega t)+b\omega\cos(\omega t),-a\omega\cos(\omega t)-b\omega\sin(\omega t)\}\\
&= \omega^2\sin^2(\omega t)\{a,b\}-\omega^2\cos^2(\omega t)\{b,a\}=\omega^2\{a,b\}=\tfrac{\omega}{m}=\tfrac{q_eB_0}{m^2}.
\end{aligned}$$

4.6 Applications aux systèmes avec contraintes

A ce stade vient le moment où nous allons essayer de montrer l'intérêt de notre approche dans l'analyse des systèmes avec contraintes. En effet, sans formalisme spécifique, on arrive à dériver les crochets de Dirac à l'aide de la solution générale et de l'identification directe.

4.6.1 Exemples de lagrangiens singuliers sans symétrie de jauge

1. Considérons d'abord le lagrangien $L=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)+w(r-R)$ décrivant une particule libre de se déplacer sur un cercle du rayon R. Les équations d'Euler-Lagrange sont $m\ddot{r}=mr\dot{\theta}^2+w$, $\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta})=0$ et $r-R=0$ dont la solution générale est

$$\begin{array}{lll} r=R & \theta=at+b & w=-mRa^2\\ p_r=0 & p_\theta=mR^2a & p_w=0 \end{array}$$

où a et b désignent des constantes d'intégration. Le hamiltonien est $H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} - w(r - R) = \frac{1}{2}mR^2a^2$. En utilisant l'équation $\dot{\theta} = \{\theta, H\}$, on obtient

$$a = \{at + b, \frac{1}{2}mR^2a^2\} \Rightarrow a = \frac{1}{2}mR^2\{b, a^2\} \Rightarrow a = mR^2a\{b, a\} \Rightarrow \{b, a\} = \frac{1}{mR^2}. \quad (4.67)$$

Après un calcul simple et direct en utilisant la solution précédente, on peut voir que les seuls crochets non nuls sont $\{\theta, p_\theta\} = 1$ et $\{\theta, w\} = -\frac{2a}{R} = -\frac{2}{mR^3}p_\theta$. Ces crochets sont les mêmes qu'on aurait pu obtenir à l'aides des méthodes de Dirac et Faddeev-Jackiw.

2. Soit le lagrangien singulier autonome $L = \frac{\dot{x}^2}{2} + x\dot{y} - y\dot{z}$, d'où on obtient les équations d'Euler-Lagrange

$$\begin{array}{lll} \ddot{x} - \dot{y} = 0 & \dot{x} + \dot{z} = 0 & \dot{y} = 0 \\ p_x = \dot{x} & p_y = x & p_z = -y \end{array} \quad (4.68)$$

dont la solution analytique est

$$\begin{array}{lll} x(t) = at + b & y(t) = c & z(t) = -at + d \\ p_x(t) = a & p_y(t) = at + b & p_z(t) = -c. \end{array} \quad (4.69)$$

Il serait très intéressant de s'arrêter ici pour analyser cette solution. Premièrement, ce lagrangien ne possède pas de symétrie de jauge car il ne contient pas de fonctions arbitraires du temps dans la solution générale des équations du mouvement (pas de contraintes de première classe). Deuxièmement, notre système à trois degré de liberté (x, y, z), ce qui veut dire que dans le cas régulier, il doit avoir six constantes d'intégration alors qu'ici il y en a juste quatre. Donc, ce lagrangien est singulier avec deux contraintes de deuxième classe $\phi_1 = p_y - x = 0$ et $\phi_2 = p_z + y = 0$ ($\{\phi_1, \phi_2\}_{CP} = -1$). On voit bien que la solution générale contient tous ce qui est relatif aux contraintes que ça soit leur nombre ou leurs types.

Si on remplace la solution ci-dessus dans le hamiltonien $H = \frac{p_x^2}{2}$ on aura

$$H = \frac{a^2}{2} \quad (4.70)$$

ce qui veut dire que seuls les crochets où la constante a apparait sont accessibles. Pour y remédier, travaillons d'abord avec le lagrangien $L = \frac{\dot{x}^2}{2} + x\dot{y} - y\dot{z} - \lambda x - \xi y$, ensuite posons $\lambda = \xi = 0$ (λ et ξ sont des coefficients réels, pas des multiplicateurs). Les nouvelles équations du mouvement seront

$$\begin{array}{lll} \ddot{x} - \dot{y} + \lambda = 0 & \dot{x} + \dot{z} + \xi = 0 & \dot{y} = 0 \\ p_x = \dot{x} & p_y = x & p_z = -y \end{array} \quad (4.71)$$

et la solution générale sera

$$\begin{array}{lll} x(t) = -\frac{\lambda}{2}t^2 + at + b & y(t) = c & z(t) = \frac{\lambda}{2}t^2 - at - \xi t + d \\ p_x(t) = -\lambda t + a & p_y(t) = -\frac{\lambda}{2}t^2 + at + b & p_z(t) = -c. \end{array} \quad (4.72)$$

Dans ce cas, le hamiltonien $H = \frac{p_x^2}{2} + \lambda x + \xi y$ aura l'expression

$$H = \frac{1}{2}a^2 + \lambda b + \xi c. \tag{4.73}$$

A ce stade, il suffit d'utiliser les équations $\frac{dx}{dt} = \{x, H\}$ et $\frac{dz}{dt} = \{z, H\}$ pour déterminer tous les crochets relatifs aux constantes d'intégration par identification comme le montre le calcul ci-dessous :

$$\begin{aligned} -\lambda t + a &= t\lambda\{a, b\} + \xi t\{a, c\} + a\{b, a\} + \xi\{b, c\} \\ \lambda t - a - \xi &= -t\lambda\{a, b\} - \xi t\{a, c\} + a\{d, a\} + \lambda t\{d, b\} + \xi\{d, c\}. \end{aligned}$$

Par identification directe, on obtient les crochets suivants :

$$\{a, b\} = -1 \ ; \ \{a, c\} = 0 \ ; \ \{a, d\} = -1 \ ; \ \{b, c\} = 0 \ ; \ \{b, d\} = 0 \ ; \ \{c, d\} = 1. \tag{4.74}$$

Un calcul direct en utilisant ces résultats et la solution (4.72) montre que tous les crochets fondamentaux sont nuls sauf

$$\{x, p_x\} = 1 \ ; \ \{p_x, p_y\} = -1 \ ; \ \{p_x, z\} = -1 \ ; \ \{y, z\} = 1 \ ; \ \{z, p_z\} = 1. \tag{4.75}$$

Ces crochets ne dépendent pas des paramètres λ et ξ, donc ils vont restés inchangés si on pose $\lambda = \xi = 0$. Autrement dit, ils sont aussi les crochets relatifs au lagrangien du départ $L = \frac{\dot{x}^2}{2} + x\dot{y} - y\dot{z}$. Il est clair qu'il ne s'agit pas de crochets de Poisson car ce lagrangien est singulier. Afin d'être sûr de nos crochets, il suffit de les utiliser pour développer les équations de Hamilton $\frac{dx_i}{dt} = \{x_i, H\}$ et $\frac{dp_i}{dt} = \{p_i, H\}$, ensuite de vérifier qu'elles sont équivalentes aux équations d'Euler-Lagrange $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0$ (voir l'exemple ci-dessous).

3. Soit une particule se mouvant en présence d'un champ électromagnétique ($\vec{E} = \xi(x\vec{i} + y\vec{j}), \vec{B} = B_0\vec{k}$), où nous supposons que le terme de masse est négligeable devant les autres. Le lagrangien dans cette situation va se réduire à la forme $L = -\frac{1}{2}q_eB_0(y\dot{x} - x\dot{y}) - \frac{1}{2}q_e\xi(x^2 + y^2)$, et les équations du mouvement seront

$$\begin{array}{cc} \dot{x} + \frac{\xi}{B_0}y = 0 & \dot{y} - \frac{\xi}{B_0}x = 0 \\ p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = -\frac{1}{2}q_eB_0y & p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \frac{1}{2}q_eB_0x. \end{array} \tag{4.76}$$

Après intégration, on obtient

$$\begin{array}{ccc} x(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t) & & y(t) = a\sin(\omega t) - b\cos(\omega t) \\ p_x(t) = -\frac{1}{2}q_eB_0(a\sin(\omega t) - b\cos(\omega t)) & ; & p_y(t) = \frac{1}{2}q_eB_0(a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)) \end{array} \tag{4.77}$$

où a et b sont des constantes et $\omega = \frac{\xi}{B_0}$. Le hamiltonien $H = \frac{1}{2}q_e\xi(x^2 + y^2)$ s'exprime en fonction de cette solution sous la forme

$$H = \frac{1}{2}q_e\xi(a^2 + b^2). \tag{4.78}$$

Déterminons le crochet $\{a,b\}$ à l'aide de l'équation $\frac{dx(t)}{dt} = \{x(t), H\}$ comme suit :

$$\begin{aligned} -\omega a\sin(\omega t) + \omega b\cos(\omega t) = & \quad \{a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t), \tfrac{1}{2}q_e\xi(a^2+b^2)\} \\ = & \quad \tfrac{1}{2}q_e\xi\cos(\omega t)\{a,b^2\} + \tfrac{1}{2}q_e\xi\sin(\omega t)\{b,a^2\} \\ = & \quad q_e\xi\cos(\omega t)b\{a,b\} + q_e\xi\sin(\omega t)a\{b,a\}. \end{aligned}$$

Par identification, on obtient $\{a,b\} = \frac{\omega}{q_e\xi} = \frac{1}{q_eB_0}$, ce qui va nous permettre de calculer les crochets fondamentaux.

$\{x,y\} = -\cos^2(\omega t)\{a,b\} + \sin^2(\omega t)\{b,a\} = -\{a,b\} = -\frac{1}{q_eB_0}$
$\{x,p_x\} = -\frac{1}{2}q_eB_0\left(-\cos^2(\omega t)\{a,b\} + \sin^2(\omega t)\{b,a\}\right) = -q_eB_0\{b,a\} = \frac{1}{2}$
$\{x,p_y\} = \frac{1}{2}q_eB_0\left(\sin(\omega t)\cos(\omega t)\{a,b\} + \sin(\omega t)\cos(\omega t)(\omega t)\{b,a\}\right) = 0$
$\{y,p_x\} = -\frac{1}{2}q_eB_0\left(-\sin(\omega t)\cos(\omega t)\{a,b\} - \sin(\omega t)\cos(\omega t)(\omega t)\{b,a\}\right) = 0$
$\{y,p_y\} = \frac{1}{2}q_eB_0\left(\sin^2(\omega t)\{a,b\} - \cos^2(\omega t)\{b,a\}\right) = q_eB_0\{a,b\} = \frac{1}{2}$
$\{p_x,p_y\} = -\frac{1}{4}\left(q_eB_0\right)^2\left(\sin^2(\omega t)\{a,b\} - \cos^2(\omega t)\{b,a\}\right) = \left(q_eB_0\right)^2\{a,b\} = -\frac{1}{4}q_eB_0.$

On remarque que $\{x,y\} \neq 0$, $\{p_x,p_y\} \neq 0$ et $\{x,p_x\} = \{y,p_y\} \neq 1$, ce qui veut dire que ce ne sont pas des crochets de Poisson. En réalité, il s'agit de crochets de Dirac calculés directement par notre méthode CI.

Pour être sûr de la justesse de nos résultats, déterminons d'abord les équations de Hamilton en se servant de ces crochets sachant que $H = \frac{1}{2}q_e\xi(x^2+y^2)$:

$\dot{x} = \{x,H\} \Rightarrow \dot{x} = \frac{1}{2}q_e\xi\{x,y^2\} \Rightarrow \dot{x} = q_e\xi y\{x,y\} \Rightarrow \dot{x} = -\frac{\xi}{B_0}y$
$\dot{y} = \{y,H\} \Rightarrow \dot{y} = \frac{1}{2}q_e\xi\{y,x^2\} \Rightarrow \dot{y} = q_e\xi x\{y,x\} \Rightarrow \dot{y} = \frac{\xi}{B_0}x$
$\dot{p}_x = \{p_x,H\} \Rightarrow \dot{p}_x = q_e\xi x\{p_x,x\} + q_e\xi y\{p_x,y\} \Rightarrow \dot{p}_x = -\frac{1}{2}q_e\xi x$
$\dot{p}_y = \{p_y,H\} \Rightarrow \dot{p}_y = q_e\xi x\{p_y,x\} + q_e\xi y\{p_y,y\} \Rightarrow \dot{p}_y = -\frac{1}{2}q_e\xi y.$

Un calcul très facile montre que la solution (4.77) vérifie ces équations, ce qui valide notre approche pour cet exemple.

4.6.2 Exemples de lagrangiens singuliers avec symétrie de jauge

1. Commençons par le lagrangien $L = \frac{1}{2}(\dot{x}-\dot{y})^2 - (x-y)$. Les équations d'Euler-Lagrange se réduisent à l'équation du mouvement $\ddot{x} - \ddot{y} = -1$, dont la solution générale est

$$\begin{array}{c} x(t) = -\frac{1}{2}t^2 + at + b + \varepsilon(t) \quad ; \quad y(t) = \varepsilon(t) \\ p_x(t) = -t + a \quad ; \quad p_y(t) = t - a \end{array} \tag{4.79}$$

où a et b sont des constantes d'intégration et $\varepsilon(t)$ une fonction arbitraire du temps, ce qui est une preuve de l'invariance de jauge de notre lagrangien. En effet, une petite variation $\delta\varepsilon$ va s'accompagner des variations infinitésimales $\delta x = \delta\varepsilon$ et $\delta y = \delta\varepsilon$, d'où la transformation de jauge $\tilde{x} = x + \alpha(t)$ et $\tilde{y} = y + \alpha(t)$ où $\alpha(t) = \delta\varepsilon$.

Pour fixer la jauge, utilisons par exemple la condition $y(t) + \frac{1}{2}p_y(t) \cdot p_x(t) = 0$, ce qui va s'accompagner de la solution

$$\begin{array}{ccc} x(t) = b - \frac{1}{2}a^2 & ; & y(t) = \frac{1}{2}t^2 - at + \frac{1}{2}a^2 \\ p_x(t) = -t + a & ; & p_y(t) = t - a. \end{array} \tag{4.80}$$

Avec cette solution, le hamiltonien $H = \frac{1}{2}p_x^2 + (x - y)$ aura l'expression

$$H = \frac{1}{2}a^2 + b \tag{4.81}$$

et l'équation $\frac{dp_x}{dt} = \{p_x, H\}$ va nous donner le crochet $\{a, b\}$ directement.

$$-1 = \{-t + a, \frac{1}{2}a^2 + b\} \Rightarrow -1 = \{a, b\} \Rightarrow \{a, b\} = -1. \tag{4.82}$$

Calculons maintenant les crochets fondamentaux à partir de (4.80).

$\{x, y\} = \{b - \frac{1}{2}a^2, \frac{1}{2}t^2 - at + \frac{1}{2}a^2\} = -t\{b, a\} + a\{b, a\} = -t + a = p_x = -p_y$
$\{x, p_x\} = \{b - \frac{1}{2}a^2, -t + a\} = \{b, a\} = 1$
$\{x, p_y\} = \{b - \frac{1}{2}a^2, t - a\} = -\{b, a\} = -1$
$\{y, p_x\} = \{\frac{1}{2}t^2 - at + \frac{1}{2}a^2, -t + a\} = 0$
$\{y, p_y\} = \{\frac{1}{2}t^2 - at + \frac{1}{2}a^2, t - a\} = 0$
$\{p_x, p_y\} = \{-t + a, t - a\} = 0.$

Avec ces crochets, les équations de Hamilton vont nous fournir les bonnes équations du mouvement :

$\dot{x} = \{x, H\} \Rightarrow \dot{x} = \{x, \frac{1}{2}p_x^2 + (x - y)\} \Rightarrow \dot{x} = p_x\{x, p_x\} - \{x, y\} \Rightarrow \dot{x} = p_x - p_x \Rightarrow \dot{x} = 0$
$\dot{y} = \{y, H\} \Rightarrow \dot{y} = \{y, \frac{1}{2}p_x^2 + (x - y)\} \Rightarrow \dot{y} = p_x\{y, p_x\} + \{y, x\} \Rightarrow \dot{y} = -p_x$
$\dot{p}_x = \{p_x, H\} \Rightarrow \dot{p}_x = \{p_x, \frac{1}{2}p_x^2 + (x - y)\} \Rightarrow \dot{p}_x = \{p_x, x\} - \{p_x, y\} \Rightarrow \dot{p}_x = -1$
$\dot{p}_y = \{p_y, H\} \Rightarrow \dot{p}_y = \{p_y, \frac{1}{2}p_x^2 + (x - y)\} \Rightarrow \dot{p}_y = p_x\{p_y, p_x\} + \{p_y, x\} - \{p_y, y\} \Rightarrow \dot{p}_y = 1.$

Ces équations sont vérifiées par la solution (4.80), ce qui montre que nos crochets sont justes.

2. Dans le cas du lagrangien $L = \frac{1}{2}(y\dot{x} + x\dot{y})^2$, la solution générale s'obtient en posant $Q = xy \Rightarrow \dot{Q} = y\dot{x} + x\dot{y}$ et le résultat sera

$$\begin{array}{ccc} x(t) = (at + b)\,\varepsilon(t) & ; & y(t) = \frac{1}{\varepsilon(t)} \\ p_x(t) = \frac{a}{\varepsilon(t)} & ; & p_y(t) = (a^2 t + ab)\,\varepsilon(t) \end{array} \tag{4.83}$$

où $\varepsilon(t)$ une fonction arbitraire du temps. Afin de déterminer la transformation de jauge infinitésimale qui laisse notre lagrangien invariant, imaginons une variation infinitésimale $\delta\varepsilon$ de la fonction $\varepsilon(t)$, ce qui va se traduire par une variation $\delta x = (at + b)\,\delta\varepsilon$ et une variation $\delta y = -\frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon(t)^2}$. Utilisons maintenant (4.83) pour avoir la transformation de jauge recherchée

$$\delta x = xy\delta\varepsilon \qquad ; \qquad \delta y = -y^2\delta\varepsilon. \tag{4.84}$$

Fixons la jauge par la condition supplémentaire $y-1=0 \Rightarrow \varepsilon(t)=1$, et la solution (4.83) devient

$$\begin{array}{ccc} x(t)=at+b & ; & y(t)=1 \\ p_x(t)=a & ; & p_y(t)=a^2t+ab \end{array} \tag{4.85}$$

ensuite remplaçons cette solution dans $H=\frac{1}{2}\frac{p_x^2}{y^2}$

$$H=\frac{1}{2}a^2. \tag{4.86}$$

L'équation $\frac{dx}{dt}=\{x,H\}$ va nous donner directement le crochet $\{a,b\}$ comme suit :

$$a=\{at+b,\frac{1}{2}a^2\} \;\Rightarrow\; a=a\{b,a\} \;\Rightarrow\; \{b,a\}=1 \;\Rightarrow\; \{a,b\}=-1.$$

Calculons maintenant les crochets fondamentaux à partir de (4.85).
$\{x,y\}=\{at+b,1\}=0$
$\{x,p_x\}=\{at+b,a\}=\{b,a\}=1$
$\{x,p_y\}=\{at,ab\}+\{b,a^2t\}+\{b,ab\}=at\{a,b\}+2at\{b,a\}+b\{b,a\}=at+b=x$
$\{y,p_x\}=\{1,a\}=0$
$\{y,p_y\}=\{1,a^2t+ab\}=0$
$\{p_x,p_y\}=\{a,a^2t+ab\}=a\{a,b\}=-a=-p_x.$

3. Le modèle de Christ-Lee [97] est décrit par le lagrangien singulier $L=\frac{1}{2}(\dot{r}^2+r^2(\dot{\theta}-z)^2)-V(r)$, où r et θ sont coordonnées polaires, z est une autre coordonnée généralisée, et $V(r)$ est un potentiel. Dans le cas où $V(r)=\frac{1}{2}r^2$, les équations d'Euler-Langange sont $\ddot{r}=r(\dot{\theta}-z)^2-r$, $\frac{d}{dt}(r^2(\dot{\theta}-z))=0$ et $0=-r^2(\dot{\theta}-z)$, et la solution générale est $r=a\cos(t)+b\sin(t)$, $\theta(t)=\varepsilon(t)$ et $z(t)=\dot{\varepsilon}(t)$, où a et b sont les seules constantes d'intégration et $\varepsilon(t)$ est une fonction arbitraire du temps. En effet, notre lagrangien est un invariant de jauge sous la transformation $\tilde{r}=r$, $\tilde{\theta}=\theta+\alpha(t)$ et $\tilde{z}=z+\dot{\alpha}(t)$, où $\alpha(t)$ est une fonction arbitraire de temps. Afin de fixer la jauge, nous choisissons $\varepsilon(t)=0$ et la solution se simplifie sous la forme

$$r=a\cos(t)+b\sin(t) \qquad \theta(t)=0 \qquad z(t)=0. \tag{4.87}$$

On en déduit que

$$p_r(t)=\dot{r}(t)=-a\sin(t)+b\cos(t) \qquad p_\theta(t)=0 \qquad p_z(t)=0 \tag{4.88}$$

et le hamiltonien sera $H=\dot{r}p_r+\dot{\theta}p_\theta+\dot{z}p_z-L=1/2(a^2+b^2)$. En utilisant l'équation $\dot{r}=\{r,H\}$, on obtient par identification le crochet des constantes d'intégration $\{a,b\}=1$. Un calcul direct montre que $\{r,p_r\}=1$ tandis que les autres crochets sont nuls.

4.7 Lagrangien de Hojman-Urrutia

Il y a au moins deux motivations physiques pour l'étude de la théorie associée à ce lagrangien que nous allons souligner brièvement. La première remonte à la publication de Hojman et Urrutia [94] où ils ont pu construire des lagrangiens linéaires pour deux systèmes d'équations différentielles de second ordre pour lesquels il n'existe pas en principe, de lagrangiens de second ordre par rapport aux vitesses (selon la classification de Douglas [93]). La deuxième motivation remonte aux travaux de Feynman, rapporté par Dyson [92], qui a obtenu le premier groupe des équations de Maxwell à partir des équations classiques du mouvement en imposant certains crochets entre les coordonnées et les vitesses. Ce travail a été étendu au deuxième groupe des équations de Maxwell [63]. Bien que dans cette approche des "crochets de Feynman" on a besoin à priori d'aucune structure de lagrangien ou de hamiltonien, Hojman et Shepley [95] ont montré en utilisant les conditions d'Helmholtz l'existence d'un lagrangien qui peut-être associé à ces crochets de Feynman. En particulier, afin de tester leur méthode, ils ont étudié les équations du mouvement suivantes :

$$\ddot{x} = -\dot{y} \qquad\qquad \ddot{y} = -y \tag{4.89}$$

qui ne sont pas dérivables d'un lagrangien. En transformant ce système en système de premier ordre $\dot{x} = z$, $\dot{y} = \omega$, $\dot{z} = -\omega$ et $\dot{\omega} = -y$, ils ont trouvé le lagrangien correspondant (en utilisant les constantes d'intégration mais dans un contexte différent du nôtre)

$$L = (y+z)\dot{x} + \omega\dot{z} + \frac{1}{2}\left(\omega^2 - 2yz - z^2\right). \tag{4.90}$$

Ce lagrangien est singulier car il est du premier ordre par rapport aux vitesses. Il a été étudié dans l'approche de Dirac par Kulshreshtha [96] et dans l'approche de Fadeev-Jackiw par Barcelos [88]. Nous n'allons pas reproduire leurs calculs ici, mais plutôt appliquer la méthode de CI qui s'avère être beaucoup plus simple.

4.7.1 Premier cas : ω est une variable

Les équations d'Euler-Lagrange sont

$$\begin{cases} \dot{y} + \dot{z} = 0 \\ 0 = \dot{x} - z \\ \dot{\omega} = \dot{x} - y - z \\ 0 = \dot{z} + \omega \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dot{x} = z \\ \dot{y} = \omega \\ \dot{z} = -\omega \\ \dot{\omega} = -y \end{cases} \tag{4.91}$$

ce qui implique que $\ddot{y} = -y$ et $\ddot{x} = -\dot{y}$. La solution générale est donnée par

$$\begin{cases} x = a\cos(t) + b\sin(t) + ct + d \\ y = -b\cos(t) + a\sin(t) \\ z = -a\sin(t) + b\cos(t) + c \\ \omega = a\cos(t) + b\sin(t) \end{cases} \tag{4.92}$$

et le hamiltonien par

$$H = -\frac{1}{2}\left(\omega^2 - 2yz - z^2\right) = -\frac{1}{2}\left(a^2 + b^2 - c^2\right). \tag{4.93}$$

A partir de l'équation de Hamilton $\dot{x} = \{x, H\}$, nous obtenons l'égalité

$$\begin{aligned} b\cos(t) - a\sin(t) + c = (-\{a,b\}\, b + \{a,c\}\, c)\ \ \cos(t) + (\{a,b\}\, a + \{b,c\}\, c)\ \ \sin(t) \\ + (\{b,c\}\, b + \{a,c\}\, a)\ \ t + (\{b,d\}\, b + \{a,d\}\, a - \{c,d\})\ \ c \end{aligned}$$

et de la même manière pour y, on aura

$$a\cos(t) + b\sin(t) = (-\{a,b\}\, a + \{b,c\}\, c)\ \ \cos(t) - (\{a,b\}\, b + \{a,c\}\, c)\ \ \sin(t).$$

Par identification directe, on aboutit aux crochets

$$\begin{gathered} \{a,b\} = \{c,d\} = -1 \\ \{a,c\} = \{a,d\} = \{b,c\} = \{b,d\} = 0 \end{gathered} \tag{4.94}$$

et finalement à

$$\begin{gathered} \{x,y\} = \{z,\omega\} = 1 \qquad \{y,\omega\} = -1 \\ \{x,z\} = \{x,\omega\} = \{y,z\} = 0. \end{gathered} \tag{4.95}$$

Il est très intéressant ici de procéder à une quantification canonique, où les opérateurs associés aux variables fondamentales doivent satisfaire les commutateurs

$$\begin{gathered} [\hat{x},\hat{y}] = [\hat{z},\hat{\omega}] = i\hbar \qquad [\hat{y},\hat{\omega}] = -i\hbar \\ [\hat{x},\hat{z}] = [\hat{x},\hat{\omega}] = [\hat{y},\hat{z}] = 0. \end{gathered} \tag{4.96}$$

Il est alors possible de choisir ces opérateurs comme suit :

$$\hat{x} = x \qquad \hat{y} = -i\hbar\partial_x - z \qquad \hat{z} = z \qquad \hat{\omega} = -i\hbar\partial_z. \tag{4.97}$$

Comme $H = -\frac{1}{2}\left(\omega^2 - 2zy - z^2\right)$, l'équation de Schrödinger sera

$$i\hbar\partial_t\Psi = -\frac{1}{2}\left(\hat{\omega}^2 - 2\hat{z}\hat{y} - \hat{z}^2\right)\Psi \tag{4.98}$$

d'où la forme explicite

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(t,x,z) = \frac{\hbar^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\Psi(t,x,z) - i\hbar\ z\frac{\partial}{\partial x}\Psi(t,x,z) - \frac{z^2}{2}\Psi(t,x,z). \tag{4.99}$$

4.7.2 Deuxième cas : ω est une constante

Ce cas avec $\omega = k =$ constante, étudié aussi par Barcelos [88] dans l'approche de Faddeev-Jackiw, est intéressant car il conduit à une théorie de jauge selon Kulshreshtha [96] qui a fait l'étude dans l'approche de Dirac. Les équations d'Euler-Lagrange sont

$$\begin{aligned} &\dot{z} = 0 \\ &\dot{x} - z = 0 \\ &\dot{x} - z - y = 0 \end{aligned} \tag{4.100}$$

dont la solution générale est triviale

$$\begin{aligned} x &= at + b \\ y &= 0 \\ z &= a. \end{aligned} \tag{4.101}$$

Cette solution ne contient pas de fonctions arbitraires du temps, donc il n'y a aucune symétrie de jauge, conclusion partagée avec Barcelos. Le hamiltonien se réduit à la forme

$$H = -\frac{1}{2}\left(k^2 - 2yz - z^2\right) = -\frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{2}a^2 \tag{4.102}$$

et en utilisant l'équation $\dot{x} = \{x, H\}$, il facile d'obtenir directement le crochet

$$\{a, b\} = -1.$$

Après un calcul facile et direct, on obtient les crochets suivants :

$$\{x, z\} = 1 \qquad \{x, y\} = \{y, z\} = 0. \tag{4.103}$$

Cette fois-ci, afin de faire une quantification canonique, on va choisir les opérateurs $\hat{x} = x$, $\hat{y} = 0$ et $\hat{z} = -i\hbar\partial_x$, et l'équation de Schrödinger sera

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(t, x) = -\frac{\hbar^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi(t, x) - \frac{k^2}{2}\Psi(t, x). \tag{4.104}$$

4.8 Application en théorie des champs

Dans cette section, nous allons essayer d'utiliser notre approche dans le contexte quantique afin de retrouver les relations de commutations bien connues en électrodynamique quantique.

4.8.1 Champ scalaire

Le champ réel de Klein-Gordon Φ est décrit par la densité lagrangienne

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - \frac{m^2}{2}\Phi^2 \tag{4.105}$$

si on pose $\hbar = c = 1$. L'équation d'Euler-Lagrange $\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} = 0$ donne naissance à l'équation du mouvement

$$\partial_t^2 \Phi - \Delta\Phi + m^2\Phi = 0 \tag{4.106}$$

dont la solution générale est

$$\Phi = \int d\vec{k} \ \left(f_k(x) a(\vec{k}) + f_k^*(x) a^\dagger(\vec{k}) \right) \tag{4.107}$$

où $f_k(x) = \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{\vec{k}}}}$, $kx = -\vec{k}\vec{x} + k_0 t$ et $\omega_{\vec{k}} = k_0 = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$ ($\hbar = c = 1$). Les $a(\vec{k})$ sont des opérateurs et les $a^\dagger(\vec{k})$ leurs opérateurs adjoints.

Sachant que

$$\Pi_\Phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\Phi}} = \dot{\Phi} = \int d\vec{k} \left(-ik_0 f_k(x) b(\vec{k}) + ik_0 f_k^*(x) a^\dagger(\vec{k}) \right) \tag{4.108}$$

on peut écrire l'opérateur hamiltonien H= $\int d\vec{x} \left(\Pi_\Phi \dot{\Phi} - \mathcal{L} \right)$ à l'aide de la solution précédente sous la forme

$$\mathrm{H} = \int d\vec{k} k_0 \frac{1}{2} \left(a^\dagger(\vec{k}) a(\vec{k}) + a(\vec{k}) a^\dagger(\vec{k}) \right) = \int d\vec{k} k_0 N(\vec{k}) \tag{4.109}$$

où $N(\vec{k}) = \frac{1}{2} \left(a^\dagger(\vec{k}) a(\vec{k}) + a(\vec{k}) a^\dagger(\vec{k}) \right)$.

Puisque nous allons travailler directement dans le contexte quantique, les équations de Heisenberg

$$\dot{\Phi} = \frac{-i}{\hbar}[\Phi, H] \tag{4.110}$$

écrites à l'aide des opérateurs et commutateurs vont remplacer les équations de Hamilton qui s'expriment en terme du crochets. Sachant qu'on a déjà posé $\hbar = 1$, calculons $\dot{\Phi}$ et $-i$[Φ,H].

$$\dot{\Phi} = \int d\vec{k} \left(-ik_0 f_k(x) a(\vec{k}) + ik_0 f_k^*(x) a^\dagger(\vec{k}) \right) \tag{4.111}$$

$$\dot{\Phi} = -i \int d\vec{k} \int d\vec{k}' k_0' \left(f_k(x) \delta(\vec{k} - \vec{k}') a(\vec{k}') - f_k^*(x) \delta(\vec{k} - \vec{k}') a^\dagger(\vec{k}') \right) \tag{4.112}$$

et

$$-i[\Phi, \mathrm{H}] = -i \int d\vec{k} \int d\vec{k}' k_0' \left(f_k(x) [a(\vec{k}), N(\vec{k}')] + f_k^*(x) [a^\dagger(\vec{k}), N(\vec{k}')] \right). \tag{4.113}$$

En utilisant les relations précédentes et l'équations de Heisenberg $\dot{\Phi} = -i[\Phi,\mathrm{H}]$, on obtient par identification directe les relations

$$\begin{array}{c} a(\vec{k}')\delta(\vec{k}-\vec{k}') = [a(\vec{k}), N(\vec{k}')] \\ -a^\dagger(\vec{k}')\delta(\vec{k}-\vec{k}') = [a^\dagger(\vec{k}), N(\vec{k}')]. \end{array} \tag{4.114}$$

D'un autre coté, sachant que $N(\vec{k}') = \frac{1}{2}\left(a^\dagger(\vec{k}')a(\vec{k}') + a(\vec{k}')a^\dagger(\vec{k}')\right)$ et à l'aide de la relation $[A, BC] = B\,[A, C] + [A, B]\,C$ bien connue des commutateurs, on aura

$$\begin{array}{rl} [a(\vec{k}), N(\vec{k}')] = & \frac{1}{2}a^\dagger(\vec{k}')[a(\vec{k}), a(\vec{k}')] + \frac{1}{2}[a(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}')]a(\vec{k}') \\ & +\frac{1}{2}a(\vec{k}')[a(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}')] + \frac{1}{2}[a(\vec{k}), a(\vec{k}')]a^\dagger(\vec{k}') \end{array} \tag{4.115}$$

$$\begin{array}{rl} [a^\dagger(\vec{k}), N(\vec{k}')] = & \frac{1}{2}a^\dagger(\vec{k}')[a^\dagger(\vec{k}), a(\vec{k}')] + \frac{1}{2}[a^\dagger(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}')]a(\vec{k}') \\ & +\frac{1}{2}a(\vec{k}')[a^\dagger(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}')] + \frac{1}{2}[a^\dagger(\vec{k}), a(\vec{k}')]a^\dagger(\vec{k}'). \end{array} \tag{4.116}$$

Maintenant, en faisant une identification entre les équations (4.114), (4.115) et (4.116), on obtient les relations de commutation

$$[a(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}')] = \delta(\vec{k}-\vec{k}') \quad ; \quad [a(\vec{k}), a(\vec{k}')] = [a^\dagger(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}')] = 0. \tag{4.117}$$

Il s'agit bien des relations relatives aux opérateurs de création et d'annihilation connues en théorie quantique des champs dans le cas d'un champ scalaire réel. Le calcul est analogue mais plus long dans le cas du champ scalaire complexe.

4.8.2 Champ spinoriel

La densité lagrangienne du champ de Dirac Ψ est

$$\mathcal{L} = i\overline{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi - m\overline{\Psi}\Psi \tag{4.118}$$

(γ^μ matrice de Dirac), ce qui nous donne en appliquant le principe de moindre action les équations de Dirac

$$i\gamma^\mu\partial_\mu\Psi - m\Psi = 0 \quad ; \quad i\overline{\Psi}\gamma^\mu\overleftarrow{\partial}_\mu + m\overline{\Psi} = 0 \tag{4.119}$$

dont la solution générale est

$$\Psi = \int\sum_{s=1}^{2} d\vec{k}\left(f_k(x)b_s(\vec{k})u_s(k) + f_k^*(x)d_s^\dagger(\vec{k})v_s(k)\right) \tag{4.120}$$

$$\overline{\Psi} = \Psi^\dagger\gamma^0 = \int\sum_{s=1}^{2} d\vec{k}\left(f_k^*(x)b_s^\dagger(\vec{k})\bar{u}_s(k) + f_k(x)d_s(\vec{k})\bar{v}_s(k)\right) \tag{4.121}$$

où $f_k(x) = \sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_{\vec{k}}}}e^{-ikx}$, $kx = -\vec{k}\vec{x} + k_0 t$ et $\omega_{\vec{k}} = k_0 = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$. Les $b_s(\vec{k})$ et $d_s(\vec{k})$ sont des opérateurs, et les $b_s^\dagger(\vec{k})$ et $d_s^\dagger(\vec{k})$ leurs opérateurs adjoints respectivement, et les bispineurs $u_s(k)$ et $v_s(k)$ ont les expressions

$$u_s(k) = \sqrt{\frac{\omega_{\vec{k}} + m}{2m}} \begin{pmatrix} \chi_s \\ \frac{\vec{\sigma}\vec{k}}{\omega_{\vec{k}}+m}\chi_s \end{pmatrix} \qquad v_s(k) = \sqrt{\frac{\omega_{\vec{k}} + m}{2m}} \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma}\vec{k}}{\omega_{\vec{k}}+m}\chi_s \\ \chi_s \end{pmatrix} \tag{4.122}$$

où $\chi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\chi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sachant que les matrice $\vec{\sigma} = (\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$ sont les matrices de Pauli. Il ne faut pas perdre de vue que $\bar{u}_s(k) = u_s(k)^\dagger\gamma^0$ et $\bar{v}_s(k) = v_s(k)^\dagger\gamma^0$.

Maintenant passons à la formulation hamiltonienne en commençant par les moments conjugués qui sont donnés par $\Pi_\Psi = \partial L/\partial\dot{\Psi} = i\overline{\Psi}\gamma^0$ et $\Pi_{\overline{\Psi}} = \partial L/\partial\dot{\overline{\Psi}} = 0$. Le hamiltonien H se réduit après simplification à la forme

$$\mathrm{H} = \int d\vec{x}\left(\Pi_\Psi\dot{\Psi} + \Pi_{\overline{\Psi}}\dot{\overline{\Psi}} - L\right) = \int d\vec{x} i\Psi^\dagger\partial_t\Psi. \tag{4.123}$$

En injectons la solution (4.120) dans l'expression de ce hamiltonien, on obtient finalement

$$\mathrm{H} = \int d\vec{k}k_0\sum_{s=1}^{2}\left(b_s^\dagger(\vec{k})b_s(\vec{k}) - d_s(\vec{k})d_s^\dagger(\vec{k})\right) = \int d\vec{k}k_0\sum_{s=1}^{2}N_s(\vec{k}) \tag{4.124}$$

où $N_s(\vec{k}) = \left(b_s^\dagger(\vec{k})b_s(\vec{k}) - d_s(\vec{k})d_s^\dagger(\vec{k})\right)$.

A ce stade, dans le but d'utiliser l'équation de Heisenberg $\dot{\Psi} = \frac{1}{i\hbar}[\Psi, \mathrm{H}] = \frac{1}{i}[\Psi, \mathrm{H}]$, calculons d'abord $\dot{\Psi}$ et $-i[\Psi, H]$:

$$\dot{\Psi} = \int\sum_{s=1}^{2}d\vec{k}\left(-ik_0 f_k(x)u_s(k)b_s(\vec{k}) + ik_0 f_k^*(x)d_s^\dagger(\vec{k})v_s(k)d_s^\dagger(\vec{k})\right) \tag{4.125}$$

$$-i[\Psi, \mathrm{H}] = -i\int\sum_{s=1}^{2}d\vec{k}\left(f_k(x)u_s(k)\left[b_s(\vec{k}), \mathrm{H}\right] + f_k^*(x)v_s(k)\left[d_s^\dagger(\vec{k}), \mathrm{H}\right]\right). \tag{4.126}$$

Maintenant, on obtient par identification les relations

$$k_0 b_s(\vec{k}) = \left[b_s(\vec{k}), \mathrm{H}\right] \qquad k_0 d_s^\dagger(\vec{k}) = -\left[d_s^\dagger(\vec{k}), \mathrm{H}\right]. \tag{4.127}$$

Sachant que H$= \int d\vec{k}'k_0'\sum_{s'=1}^{2}N_{s'}(\vec{k}')$, les relations précédentes deviennent

$$k_0 b_s(\vec{k}) = \int d\vec{k}'k_0'\sum_{s'=1}^{2}\left[b_s(\vec{k}), N_{s'}(\vec{k}')\right] \qquad k_0 d_s^\dagger(\vec{k}) = -\int d\vec{k}'k_0'\sum_{s'=1}^{2}\left[d_s^\dagger(\vec{k}), N_{s'}(\vec{k}')\right] \tag{4.128}$$

d'où les commutateurs

$$\left[b_s(\vec{k}), N_{s'}(\vec{k}')\right] = b_{s'}(\vec{k}')\delta_{ss'}\delta(\vec{k}-\vec{k}') \tag{4.129}$$

$$\left[d_s^\dagger(\vec{k}), N_{s'}(\vec{k}')\right] = -d_{s'}^\dagger(\vec{k}')\delta_{ss'}\delta(\vec{k}-\vec{k}'). \tag{4.130}$$

Pour continuer, il faut prendre en considération le fait que le champ de Dirac décrit des fermions et qu'il est indispensable de travailler avec des anticommutateurs $[,]_+$ à la place des commutateurs $[,] = [,]_-$ pour satisfaire le principe d'exclusion de Pauli. Pour cela, on va utiliser la relation bien connue $[A, BC]_- = -B\,[A, C]_+ + [A, B]_+\,C$. Maintenant, sachant $N_{s'}(\vec{k}') = b_{s'}^\dagger(\vec{k}')b_{s'}(\vec{k}') - d_{s'}(\vec{k}')d_{s'}^\dagger(\vec{k}')$, calculons les commutateurs ci-dessous.

$$\begin{aligned}\left[b_s(\vec{k}), N_{s'}(\vec{k}')\right] \;&= -b_{s'}^\dagger(\vec{k}')\left[b_s(\vec{k}), b_{s'}(\vec{k}')\right]_+ + \left[b_s(\vec{k}), b_{s'}^\dagger(\vec{k}')\right]_+ b_{s'}(\vec{k}') \\ &\quad + d_{s'}(\vec{k}')\left[b_s(\vec{k}), d_{s'}^\dagger(\vec{k}')\right]_+ - \left[b_s(\vec{k}), d_{s'}(\vec{k}')\right]_+ d_{s'}^\dagger(\vec{k}')\end{aligned} \tag{4.131}$$

$$\begin{aligned}\left[d_s^\dagger(\vec{k}), N_{s'}(\vec{k}')\right] \;&= -b_{s'}^\dagger(\vec{k}')\left[d_s^\dagger(\vec{k}), b_{s'}(\vec{k}')\right]_+ + \left[d_s^\dagger(\vec{k}), b_{s'}^\dagger(\vec{k}')\right]_+ b_{s'}(\vec{k}') \\ &\quad + d_{s'}(\vec{k}')\left[d_s^\dagger(\vec{k}), d_{s'}^\dagger(\vec{k}')\right]_+ - \left[d_s^\dagger(\vec{k}), d_{s'}(\vec{k}')\right]_+ d_{s'}^\dagger(\vec{k}').\end{aligned} \tag{4.132}$$

Par identification des équations (4.129) et (4.131) on aura

$$\left[b_s(\vec{k}), b_{s'}^\dagger(\vec{k}')\right]_+ = \delta_{ss'}\delta(\vec{k}-\vec{k}'). \tag{4.133}$$

Une deuxième identification entre équations (4.130) et (4.132) nous donnera aussi

$$\left[d_s^\dagger(\vec{k}), d_{s'}(\vec{k}')\right]_+ = \delta_{ss'}\delta(\vec{k}-\vec{k}') \quad \Rightarrow \quad \left[d_{s'}(\vec{k}'), d_s^\dagger(\vec{k})\right]_+ = \delta_{ss'}\delta(\vec{k}-\vec{k}'). \tag{4.134}$$

On en déduit encore par identification que les autres commutateurs apparaissant dans les équations (4.131) et (4.132) sont nuls. Pour avoir les autres commutateurs, il faut aussi utiliser l'équation de Heisenberg $\dot{\overline{\Psi}} = -i\left[\overline{\Psi}, H\right]$ et les calculs seront presque les mêmes. Ces résultats sont exactement identiques aux résultats de la quantification canonique du champ de Dirac.

4.8.3 Le neutrino de Majorana

Dans la représentation de Majorana [21] des matrices $\gamma^\mu, \mu = 0...3$, l'équation de Dirac devient réelle avec quatre composantes de Ψ. Dans ce cas, on démontre [99] qu'il est possible de réécrire la densité lagrangienne comme une somme d'une densité $\mathcal{L}_l$ décrivant un champs complexe à deux composantes gaucher η, et d'une autre $\mathcal{L}_d$ décrivant un champs complexe à deux composantes droitier ξ ($\mathcal{L} = \mathcal{L}_l + \mathcal{L}_d$). La densité lagrangienne d'un neutrino de Majorana gaucher [99] est donnée par [2]

$$\mathcal{L}_l = \eta^\dagger i\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\eta - \frac{m}{2}\left(\eta^T i\sigma^2\eta - \eta^\dagger i\sigma^2\eta^*\right) \tag{4.135}$$

2. Pour un neutrino droitier, $\mathcal{L}_d = \xi^\dagger i\sigma^\mu\partial_\mu\xi + \frac{m}{2}\left(\xi^T i\sigma^2\xi - \xi^\dagger i\sigma^2\xi^*\right)$, où $\sigma^\mu = (\sigma^0, \sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$.

où $\bar{\sigma}^\mu = (\sigma^0, -\sigma^1, -\sigma^2, -\sigma^3)$ et η est un champ complexe à deux composantes [3]. Les équations d'Euler-Lagrange conduisent à l'équation de Majorana $\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \eta + m\sigma^2 \eta^* = 0$, dont la solution générale est

$$\eta(t, \vec{x}) = \int \sum_{s=1}^{2} d\vec{k} \left(f_k(x) a_s(\vec{k}) w_s^{(1)}(k) + f_k^*(x) a_s^\dagger(\vec{k}) w_s^{(2)}(k) \right) \tag{4.136}$$

où $f_k(x) = \sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3 k_0}} e^{-ikx}$, $k_0 = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$, $a_s(\vec{k})$ et $a_s^\dagger(\vec{k})$ sont des opérateurs. Les $w_s^{(1)}(k)$ et $w_s^{(2)}(k)$ sont deux spineurs qui peuvent être exprimés à l'aide des spineurs $\chi_1 = (1 \;\; 0)^T$ et $\chi_2 = (0 \;\; 1)^T$ comme suit :

$$w_s^{(1)}(k) = \sqrt{\frac{k_0 + m}{2m}} \left(1 - \frac{\vec{\sigma}.\vec{k}}{k_0 + m} \right) \frac{1}{\sqrt{2}} \chi_s \quad ; \quad w_s^{(2)}(k) = \sqrt{\frac{k_0 + m}{2m}} \left(1 - \frac{\vec{\sigma}.\vec{k}}{k_0 + m} \right) \frac{i\sigma^2}{\sqrt{2}} \chi_s. \tag{4.137}$$

En utilisant la solution (4.136), le hamiltonien H$= \frac{1}{2} \int d\vec{x} i(\eta^\dagger \partial_t \eta - \partial_t \eta^\dagger \eta)$ va s'écrire sous la forme

$$\mathrm{H} = \int d\vec{k} k_0 \sum_{s=1}^{2} a_s^\dagger(\vec{k}) a_s(\vec{k}) = \int d\vec{k} k_0 \sum_{s=1}^{2} N_s(\vec{k}). \tag{4.138}$$

A partir de l'équation de Heisenberg $\dot{\eta} = \frac{1}{i} [\eta, \mathrm{H}]$, on obtient les égalités

$$k_0 a_s(\vec{k}) = \int d\vec{k}' k_0' \sum_{s'=1}^{2} \left[a_s(\vec{k}), N_{s'}(\vec{k}') \right] \tag{4.139}$$

$$k_0 a_s^\dagger(\vec{k}) = - \int d\vec{k}' k_0' \sum_{s'=1}^{2} \left[a_s^\dagger(\vec{k}), N_{s'}(\vec{k}') \right] \tag{4.140}$$

où $N_s(\vec{k}) = a_s^\dagger(\vec{k}) a_s(\vec{k})$. On en déduit directement les crochets

$$\left[a_s(\vec{k}), N_{s'}(\vec{k}') \right] = a_{s'}(\vec{k}') \delta_{ss'} \delta(\vec{k} - \vec{k}') \tag{4.141}$$

$$\left[a_s^\dagger(\vec{k}), N_{s'}(\vec{k}') \right] = -a_{s'}^\dagger(\vec{k}') \delta_{ss'} \delta(\vec{k} - \vec{k}'). \tag{4.142}$$

Pour les fermions, nous utiliserons la propriété $[A, BC] = -B [A, C]_+ + [A, B]_+ C$ afin d'exprimer ces commutateurs au moyen des anticommutateurs comme suit :

$$\left[a_s(\vec{k}), N_{s'}(\vec{k}') \right] = -a_{s'}^\dagger(\vec{k}') \left[a_s(\vec{k}), a_{s'}(\vec{k}') \right]_+ + \left[a_s(\vec{k}), a_{s'}^\dagger(\vec{k}') \right]_+ a_{s'}(\vec{k}') \tag{4.143}$$

et

$$\left[a_s^\dagger(\vec{k}), N_{s'}(\vec{k}') \right] = -a_{s'}^\dagger(\vec{k}') \left[a_s^\dagger(\vec{k}), a_{s'}(\vec{k}') \right]_+ + \left[a_s^\dagger(\vec{k}), a_{s'}^\dagger(\vec{k}') \right]_+ a_{s'}(\vec{k}'). \tag{4.144}$$

3. $\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu = \partial_t - \vec{\sigma}.\vec{\nabla}$ où $\sigma = (\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$ sont les matrices de Pauli.

Par l'identification des équations (4.141) et (4.143), nous obtenons la règle d'anticommutation

$$\left[a_s(\vec{k}), a_{s'}(\vec{k}')\right]_+ = 0 \qquad \left[a_s(\vec{k}), a^\dagger_{s'}(\vec{k}')\right]_+ = \delta_{ss'}\delta(\vec{k}-\vec{k}'). \tag{4.145}$$

De la même manière, l'identification entre les équations (4.142) et (4.144) nous donne

$$\left[a^\dagger_s(\vec{k}), a^\dagger_{s'}(\vec{k}')\right]_+ = 0 \qquad \left[a^\dagger_s(\vec{k}), a_{s'}(\vec{k}')\right]_+ = \delta_{ss'}\delta(\vec{k}-\vec{k}') \tag{4.146}$$

Ces règles de commutation sont exactement identiques aux résultats de la quantification canonique du champ Majorana [99].

4.8.4 Champ vectoriel

Dans le cas du champ de Maxwell, la densité lagrangienne $\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ conduit aux équations du mouvement $\partial^\nu\partial_\nu A^\mu - \partial^\mu\partial_\nu A^\nu = 0$ sachant que $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ où $A^\mu = (A^0, \vec{A})$ est le quadrivecteur potentiel. Pour fixer la jauge, on va utiliser les conditions de Coulomb $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$ et $A^0 = 0$, ce qui réduit les équations du mouvement à la forme $\partial^\nu\partial_\nu A^\mu = 0$. Dans ce cas la solution générale peut s'écrire comme étant

$$A^\mu = \int \sum_{\lambda=1}^{2} d\vec{k}\varepsilon^\mu_\lambda(k)\left(f_k(x)a_\lambda(\vec{k}) + f^*_k(x)a^\dagger_\lambda(\vec{k})\right) \tag{4.147}$$

où $f_k(x) = \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{\vec{k}}}}$, $kx = -\vec{k}\vec{x} + k_0 t$ et $\omega_{\vec{k}} = k_0 = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2} = \left|\vec{k}\right|$ ($\hbar = c = 1$ et $m = 0$). Les $a_\lambda(\vec{k})$ sont des opérateurs et les $a^\dagger_\lambda(\vec{k})$ leurs opérateurs adjoints. Les deux quadrivecteurs $\varepsilon^\mu_\lambda(k) = (\varepsilon^0_\lambda(k), \vec{\varepsilon}_\lambda(k)), \lambda = 1...2$ vérifient les relations

$$\varepsilon^0_\lambda(k) = 0 \qquad \vec{\varepsilon}_\lambda(k)\cdot\vec{k} = 0 \qquad \vec{\varepsilon}_\lambda(k)\cdot\vec{\varepsilon}_{\lambda'}(k) = \delta_{\lambda\lambda'} \qquad \vec{\varepsilon}_1(k)\wedge\vec{\varepsilon}_2(k) = \vec{k}/|\vec{k}|. \tag{4.148}$$

Sachant que les moments conjugués sont $\Pi^\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{A}_\mu} = -F^{0\mu}$, le hamiltonien sera

$$\mathrm{H} = \int d\vec{x}\left(\Pi^\mu \dot{A}_\mu - L\right) = \int \frac{d\vec{x}}{2}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2) \tag{4.149}$$

où $\vec{B} = \overrightarrow{rot}\vec{A}$ et $\vec{E} = -\partial_t\vec{A}$. A l'aide de la solution (4.147), il aura l'expression

$$\mathrm{H} = \int d\vec{k}k_0 \sum_{\lambda=1}^{2}\frac{1}{2}\left(a^\dagger_\lambda(\vec{k})a_\lambda(\vec{k}) + a_\lambda(\vec{k})a^\dagger_\lambda(\vec{k})\right) = \int d\vec{k}k_0\sum_{\lambda=1}^{2}N_\lambda(\vec{k}). \tag{4.150}$$

Afin d'utiliser les équations de Heisenberg, calculons $\dot{A}^\mu$ et $[A_\mu, \mathrm{H}]$ séparément.

$$\dot{A}^\mu = -i\int \sum_{\lambda=1}^{2} d\vec{k}\varepsilon^\mu_\lambda(k)\ \left(f_k(x)\ k_0 a_\lambda(\vec{k}) - f^*_k(x)\ k_0 a^\dagger_\lambda(\vec{k})\right) \tag{4.151}$$

$$\text{-}i[A_\mu,\mathrm{H}]=-i\int\sum_{\lambda=1}^{2}d\vec{k}\varepsilon_\lambda^\mu(k)\left(\ f_k(x)\int d\vec{k}'k_0'\sum_{\lambda'=1}^{2}\left[a_\lambda(\vec{k}),N_{\lambda'}(\vec{k}')\right]+f_k^*(x)\int d\vec{k}'k_0'\sum_{\lambda'=1}^{2}\left[a_\lambda^\dagger(\vec{k}),N_{\lambda'}(\vec{k}')\right]\ \right) \tag{4.152}$$

Sachant que $\dot{A}^\mu=\frac{1}{i\hbar}\left[A_\mu,\mathrm{H}\right]=\frac{1}{i}\left[A_\mu,\mathrm{H}\right]$ et à l'aide des résultats précédents, on obtient par identification

$$k_0a_\lambda(\vec{k})=\int d\vec{k}'k_0'\sum_{\lambda'=1}^{2}\left[a_\lambda(\vec{k}),N_{\lambda'}(\vec{k}')\right] \tag{4.153}$$

$$k_0a_\lambda^\dagger(\vec{k})=-\int d\vec{k}'k_0'\sum_{\lambda'=1}^{2}\left[a_\lambda^\dagger(\vec{k}),N_{\lambda'}(\vec{k}')\right] \tag{4.154}$$

ce qui implique que

$$\left[a_\lambda(\vec{k}),N_{\lambda'}(\vec{k}')\right]=a_{\lambda'}(\vec{k}')\delta_{\lambda\lambda'}\delta(\vec{k}-\vec{k}') \tag{4.155}$$

$$\left[a_\lambda^\dagger(\vec{k}),N_{\lambda'}(\vec{k}')\right]=-a_{\lambda'}^\dagger(\vec{k}')\delta_{\lambda\lambda'}\delta(\vec{k}-\vec{k}'). \tag{4.156}$$

Par ailleurs, $N_\lambda(\vec{k})=\frac{1}{2}\left(a_\lambda^\dagger(\vec{k})a_\lambda(\vec{k})+a_\lambda(\vec{k})a_\lambda^\dagger(\vec{k})\right)$, donc

$$\begin{aligned}\left[a_\lambda(\vec{k}),N_{\lambda'}(\vec{k}')\right]&=\frac{1}{2}a_{\lambda'}^\dagger(\vec{k}')\left[a_\lambda(\vec{k}),a_{\lambda'}(\vec{k}')\right]+\frac{1}{2}\left[a_\lambda(\vec{k}),a_{\lambda'}^\dagger(\vec{k}')\right]a_{\lambda'}(\vec{k}')\\&+\frac{1}{2}a_{\lambda'}(\vec{k}')\left[a_\lambda(\vec{k}),a_{\lambda'}^\dagger(\vec{k}')\right]+\frac{1}{2}\left[a_\lambda(\vec{k}),a_{\lambda'}(\vec{k}')\right]a_{\lambda'}^\dagger(\vec{k}')\end{aligned} \tag{4.157}$$

$$\begin{aligned}\left[a_\lambda^\dagger(\vec{k}),N_{\lambda'}(\vec{k}')\right]&=\frac{1}{2}a_{\lambda'}^\dagger(\vec{k}')\left[a_\lambda^\dagger(\vec{k}),a_{\lambda'}(\vec{k}')\right]+\frac{1}{2}\left[a_\lambda^\dagger(\vec{k}),a_{\lambda'}^\dagger(\vec{k}')\right]a_{\lambda'}(\vec{k}')\\&+\frac{1}{2}a_{\lambda'}(\vec{k}')\left[a_\lambda^\dagger(\vec{k}),a_{\lambda'}^\dagger(\vec{k}')\right]+\frac{1}{2}\left[a_\lambda^\dagger(\vec{k}),a_{\lambda'}(\vec{k}')\right]a_{\lambda'}^\dagger(\vec{k}').\end{aligned} \tag{4.158}$$

Par comparaison des deux dernières équations avec les équations (4.155) et (4.156) on aura les relations de commutations relatives aux opérateurs $a_\lambda^\dagger(\vec{k})$ et $a_\lambda(\vec{k})$ qui sont

$$\left[a_\lambda(\vec{k}),a_{\lambda'}^\dagger(\vec{k}')\right]=\delta_{\lambda\lambda'}\delta(\vec{k}-\vec{k}') \tag{4.159}$$

tandis que les autres commutateurs sont nuls. Ce résultat est bien connu en théorie quantique des champs quand il s'agit de quantifier le champ de Maxwell dans la jauge de Coulomb, ce qui montre la validité de notre approche.

4.9 La méthode des constantes d'intégration perturbée

Le but de cette section est de démontrer que notre approche peut être étendue d'une façon naturelle au cas des systèmes solubles ayant subis de petites perturbations non

linéaires. Soit donc le lagrangien perturbé $L = L_0(q,\dot{q}) - \varepsilon V(q)$ où ε est un petit paramètre proche de zéro ($|\varepsilon| \simeq 0 \Leftrightarrow |\varepsilon| \ll 1$) et $V(q)$ un potentiel dépendant des coordonnées généralisées $q = (q_1, q_2, ..., q_N)$. Les équations d'Euler-Lagrange dans ce cas seront

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{d}{dt}\frac{\partial L_0}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L_0}{\partial q_i} = -\varepsilon\frac{\partial V}{\partial q_i} \quad \text{avec} \quad p_{i=}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad i = 1...N. \tag{4.160}$$

Dans un premier temps, posons $\varepsilon = 0$ afin d'étudier le lagrangien $L_0(q,\dot{q})$. Les N équations du mouvement seront $\frac{d}{dt}\frac{\partial L_0}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L_0}{\partial q_i} = 0$ dont la solution générale qu'on suppose connue est de la forme $q_{_L}(t) = \tilde{q}_{_L}(t,C)$ et $p_{_L}(t) = \frac{\partial L_0}{\partial \dot{q}} = \tilde{p}_{_L}(t,C)$, où $C = (C_1, C_2, ..., C_M)$ est l'ensemble des M constantes d'intégration. On va supposer que ces dernière sont choisies à l'aide de M conditions que les $2N$ variables fondamentales doivent satisfaire à un instant donné t_0 (voir la page 129). La méthode des constantes d'intégration va alors nous permettre d'avoir tous leurs crochets $\{C_k, C_l\}_{_L}$.

La méthode des perturbations [23] consiste d'abord à supposer que la correction sur la solution est de la forme $q = \tilde{q}_{_L}(t,C) + \varepsilon q_{_p} + O(\varepsilon^2)$ et $p = \tilde{p}_{_L}(t,C) + \varepsilon p_{_p} + O(\varepsilon^2)$. La suite sera d'injecter cette quantité dans (4.160) et de prendre un développement limité à l'ordre un au voisinage de $\varepsilon = 0$. Par identification par rapport à ε, il est possible d'avoir les équations différentielles que doivent vérifier les corrections $q_{_p}$. La théorie des perturbations [23] nous enseigne aussi que la résolution de ces dernières va donner naissance à de nouvelles constantes d'intégration supplémentaires en plus des constantes pertinentes C_k de la solution libre $\tilde{q}_{_L}(t,C)$. Autrement dit, on aura $q_{_p} = q_{_p}(t,C,G)$. Ces nouvelles constantes $G = (G_1, ..., G_M)$ doivent-être éliminées car elles sont juste le prix de l'utilisation de la méthode des perturbations. Pour ce faire, nous allons utiliser les mêmes conditions déjà imposées à la solution $q_{_L}(t)$ et $p_{_L}(t)$, mais cette fois-ci sur la solution perturbée $q = \tilde{q}_{_L}(t,C) + \varepsilon q_{_p}$ et $p = \tilde{q}_{_L}(t,C) + \varepsilon p_{_p}$ parce que le choix des constantes n'affecte pas la validité de la méthode CI. La solution approximative sera alors de la forme

$$q = \tilde{q}_{_L}(t,C) + \varepsilon\tilde{q}_{_p}(t,C) + O(\varepsilon^2). \tag{4.161}$$

Quant aux moments conjugués, ils s'obtiennent à l'aide de la relation $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L_0}{\partial \dot{q}_i}$, ils seront de la forme

$$p = \tilde{p}_{_L}(t,C) + \varepsilon\tilde{p}_{_p}(t,C) + O(\varepsilon^2). \tag{4.162}$$

Si $H_0(q,p)$ est le hamiltonien relatif au lagrangien libre $L_0(q,\dot{q})$, le hamiltonien associé au lagrangien $L = L_0(q,\dot{q}) - \varepsilon V(q)$ sera de la forme

$$H = H_0(q,p) + \varepsilon V(q). \tag{4.163}$$

L'injection de (4.161) et (4.162) dans cette expression, suivie d'un développement limité à l'ordre un, nous permet d'avoir l'approximation

$$H = H_0(\tilde{q}_{_L}, \tilde{p}_{_L}) + \varepsilon\left(\tilde{q}_{_{i\,p}}\frac{\partial H_0}{\partial q_i}(\tilde{q}_{_L}, \tilde{p}_{_L}) + \tilde{p}_{_{i\,p}}\frac{\partial H_0}{\partial p_i}(\tilde{q}_{_L}, \tilde{p}_{_L}) + V(\tilde{q}_{_L})\right) + O(\varepsilon^2). \tag{4.164}$$

Posons

$$H_1 = \tilde{q}_{i\ p}\frac{\partial H_0}{\partial q_i}(\tilde{q}_L, \tilde{p}_L) + \tilde{p}_{i\ p}\frac{\partial H_0}{\partial p_i}(\tilde{q}_L, \tilde{p}_L) + V(\tilde{q}_L) \tag{4.165}$$

d'où

$$H = H_0(\tilde{q}_L, \tilde{p}_L) + \varepsilon H_1 + O(\varepsilon^2). \tag{4.166}$$

Afin d'appliquer la méthodes des constantes d'intégration, il est naturel de supposer que les crochets $\{C_k, C_l\}$ subissent eux aussi une perturbation de la forme

$$\{C_k, C_l\} = \{C_k, C_l\}_L + \varepsilon\{C_k, C_l\}_p + O(\varepsilon^2). \tag{4.167}$$

Maintenant, connaissant les égalités (4.161), (4.162), (4.166) et (4.167), appliquons la propriété (4.33) en ne gardant que les termes du développement limité à l'ordre un au voisinage de $\varepsilon = 0$. Ensuite par identification par rapport à ε, nous aboutissons aux relations

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \tilde{q}_{i_L}}{\partial t} = \sum_{k,l=1}^{M}\{C_k, C_l\}_L \frac{\partial \tilde{q}_{i_L}}{\partial C_k}\frac{\partial H_0}{\partial C_l} \\
&\frac{\partial \tilde{q}_{i_p}}{\partial t} - \sum_{k,l=1}^{M}\{C_k, C_l\}_L \left(\frac{\partial \tilde{q}_{i_L}}{\partial C_k}\frac{\partial H_1}{\partial C_l} + \frac{\partial \tilde{q}_{i_p}}{\partial C_k}\frac{\partial H_0}{\partial C_l}\right) = \sum_{k,l=1}^{M}\{C_k, C_l\}_p \frac{\partial \tilde{q}_{i_L}}{\partial C_k}\frac{\partial H_0}{\partial C_l}.
\end{aligned} \tag{4.168}$$

Le résultat est analogue pour les moments conjugués p. La première équation nous permet d'avoir les crochets $\{C_k, C_l\}_L$, chose déjà faite car il s'agit de l'équation relative au lagrangien libre L_0. En remplaçant dans la deuxième, on accède aux corrections $\{C_k, C_l\}_p$ après une identification directe.

Afin d'avoir les crochets des variables fondamentales q et p, nous allons utiliser ce résultat en plus de la solution (4.161) et (4.162). Par exemple,

$$\begin{aligned}
\{q_i, p_j\} &\simeq \{\tilde{q}_{i_L} + \varepsilon\tilde{q}_{i_p}\ ,\ \tilde{p}_{j_L} + \varepsilon\tilde{p}_{j_p}\} \\
&\simeq \sum_{k,l=1}^{M}\{C_k, C_l\}\frac{\partial\left(\tilde{q}_{i_L}+\varepsilon\tilde{q}_{i_p}\right)}{\partial C_k}\frac{\partial(\tilde{p}_{j_L}+\varepsilon\tilde{p}_{j_p})}{\partial C_l} \\
&\simeq \sum_{k,l=1}^{M}(\{C_k, C_l\}_L + \varepsilon\{C_k, C_l\}_p)\frac{\partial\left(\tilde{q}_{i_L}+\varepsilon\tilde{q}_{i_p}\right)}{\partial C_k}\frac{\partial(\tilde{p}_{j_L}+\varepsilon\tilde{p}_{j_p})}{\partial C_l} \\
&\simeq \sum_{k,l=1}^{M}\{C_k, C_l\}_L\left(\frac{\partial \tilde{q}_{i_L}}{\partial C_k}\frac{\partial \tilde{p}_{j_L}}{\partial C_l} + \varepsilon\left(\frac{\partial \tilde{q}_{i_p}}{\partial C_k}\frac{\partial \tilde{p}_{j_L}}{\partial C_l} + \frac{\partial \tilde{q}_{i_L}}{\partial C_k}\frac{\partial \tilde{p}_{j_p}}{\partial C_l}\right)\right) + \varepsilon\{C_k, C_l\}_p\frac{\partial \tilde{q}_{i_L}}{\partial C_k}\frac{\partial \tilde{p}_{j_L}}{\partial C_l}.
\end{aligned}$$

Comme application, soit le lagrangien $L = \frac{\dot{x}^2}{2} + x\dot{y} - y - \varepsilon\left(e^y + \cos(x)\right)$, où le paramètre ε est infinitésimal ($|\varepsilon| \simeq 0$). Les équations d'Euler-Lagrange nous donnent les équations du mouvement

$$\begin{aligned}
\ddot{x} &= \dot{y} + \varepsilon\sin(x) \\
\dot{x} &= -1 - \varepsilon e^y.
\end{aligned} \tag{4.169}$$

Il est clair que ce système n'est pas du tout trivial et il est peu probable qu'il soit exactement soluble vu qu'il est non linéaire. Pour cette raison, nous allons nous contenter d'un

développement perturbatif de la solution autour de petit paramètre ε. Ecrivons la solution sous la forme approximative

$$\begin{array}{c} x = x_{_L} + \varepsilon x_p + O(\varepsilon^2) \\ y = y_{_L} + \varepsilon y_p + O(\varepsilon^2) \end{array} \tag{4.170}$$

et injectons dans le système ci-dessus, en prenant un développement limité à l'orde 1 au voisinage de $\varepsilon = 0$.

$$\begin{array}{c} (\ddot{x}_{_L} - \dot{y}_{_L}) + (\ddot{x}_p - \dot{y}_p - \sin(x_L))\varepsilon + O(\varepsilon^2) = 0 \\ (\dot{x}_{_L} + 1) + (\dot{x}_p + e^y)\,\varepsilon + O(\varepsilon^2) = 0. \end{array} \tag{4.171}$$

Par identification par rapport à ε, on obtient le système

$$\begin{array}{ll} \ddot{x}_{_L} - \dot{y}_{_L} = 0 & \dot{x}_{_L} + 1 = 0 \\ \ddot{x}_p - \dot{y}_p - \sin(x_{_L}) = 0 & \dot{x}_p + e^{y_L} = 0 \end{array} \tag{4.172}$$

dont résolution se fait par ordre croissant de ε en commençant par la solution libre qui est

$$x_{_L} = -t + a \qquad y_{_L} = b \tag{4.173}$$

où les constantes d'intégration a et b sont choisies de telles sorte que $x_{_L}(0) = a$ et $y_{_L}(0) = b$. Les corrections seront alors

$$x_p = -e^b\ t + c \qquad\qquad y_p = -\cos(t-a) + d \tag{4.174}$$

où c et d sont deux nouvelles constantes d'intégration dont il faut de se débarrasser. Remplaçons dans (4.170)

$$\begin{array}{c} x = (-t + a) + \varepsilon\ (-e^b\ t + c) + O(\varepsilon^2) \\ y = b + \varepsilon\ (-\cos(t-a) + d) + O(\varepsilon^2). \end{array} \tag{4.175}$$

A ce stade, imposons les conditions $x(0) = a$ et $y(0) = b$ déjà utilisées ci-dessus avec la solution libre, ce qui va se traduire par les relations $c = 0$ et $d = \cos(a)$, d'où la solution perturbée

$$\begin{array}{l} x = -t + a - \varepsilon e^b\ t + O(\varepsilon^2) \\ y = b + \varepsilon(-\cos(t-a) + \cos(a)) + O(\varepsilon^2). \end{array} \tag{4.176}$$

Injectons maintenant cette solution dans le hamiltonien $H = \frac{p_x^2}{2} + y + \varepsilon\,(e^y + \cos(x))$ et prenons un développement limité à l'ordre 1, sachant que $p_x = \dot{x}$ et $p_y = x$, afin d'avoir le hamiltonien sous la forme

$$H = \frac{1}{2} + b + \varepsilon\left(2e^b + \cos(a)\right) + O(\varepsilon^2). \tag{4.177}$$

Le crochet $\{a, b\}$ va à son tour s'écrire sous la forme d'un développement limité

$$\{a, b\} = \{a, b\}_{_L} + \varepsilon\{a, b\}_p + O(\varepsilon^2). \tag{4.178}$$

L'équation $\dot{x} = \{x, H\} = \{a, b\}\left(\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial H}{\partial b} - \frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial H}{\partial a}\right)$ développée à l'ordre un, devient

$$-1 - \varepsilon\ e^b \simeq \{a, b\}_{_L} + \varepsilon\left(\{a, b\}_p + 2e^b\{a, b\}_{_L}\right) + O(\varepsilon^2) \tag{4.179}$$

d'où

$$-1 = \{a,b\}_{L} \qquad -e^b - 2e^b\{a,b\}_{L} = \{a,b\}_{p}. \tag{4.180}$$

Cela nous donne les crochets $\{a,b\}_{L} = -1$ et $\{a,b\}_{p} = e^b$, ainsi que le développement du crochet

$$\{a,b\} = -1 + \varepsilon e^b + O(\varepsilon^2). \tag{4.181}$$

Il est intéressant de voir que l'équation $\dot{y} = \{y,H\} = \{a,b\}\left(\frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial H}{\partial b} - \frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial H}{\partial a}\right)$ conduit au même résultat. En effet, après un développement limité, on aura

$$\varepsilon\sin(t-a) = -\varepsilon\{a,b\}_{L}\sin(t-a) \quad \Rightarrow \quad \{a,b\}_{L} = -1. \tag{4.182}$$

Maintenant, le crochet $\{x,y\}$ va se calculer comme suit :

$$\{x,y\} = \{a,b\}\left(\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial b} - \frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial a}\right) = -1 + \varepsilon e^b + O(\varepsilon^2) \tag{4.183}$$

mais $b = y_{L} = y - \varepsilon y_p + O(\varepsilon^2)$, d'où

$$\{x,y\} = -1 + \varepsilon e^{y_L} + O(\varepsilon^2) = -1 + \varepsilon e^{y - \varepsilon y_p + O(\varepsilon^2)} + O(\varepsilon^2). \tag{4.184}$$

Comme $e^{y-\varepsilon y_p - O(\varepsilon^2)} = e^y e^{-\varepsilon y_p - O(\varepsilon^2)} = e^y\left(1 - \varepsilon y_p + O(\varepsilon^2)\right)$, la relation va prendre la forme

$$\{x,y\} = -1 + \varepsilon e^y + O(\varepsilon^2). \tag{4.185}$$

Le calcul des crochets où figurent p_x et p_y se fait de la même manière en utilisant le fait que $p_x = \dot{x} = -1 - \varepsilon e^y \simeq -1 - \varepsilon\ e^b$ et $p_y = x$.

4.10 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons exposé une nouvelle approche permettant d'avoir les crochets relatifs à un système soluble en travaillant directement avec les constantes d'intégration de la solution générale des équations du mouvement. Cela est possible grâce à une propriété très importante (voir (4.26)) qu'on a démontrée dans le cas général sans préciser le type de crochets en question. La nouveauté dans cette démarche réside dans le fait de traiter les constantes d'intégration comme étant des variables, ce qui nous rappelle le théorème de Jacobi de mécanique analytique.

Avec notre méthode, nous avons d'abord retrouvé les crochets de Poisson dans le cas de lagrangiens réguliers, ensuite nous l'avons appliquée aux systèmes avec contraintes et cela a donné les crochets de Dirac, ce qui a rendu possible une application en théorie quantique des champs.

Notre approche est pratique car elle est très directe, facile et sans formalisme spécial, mais elle repose entièrement sur la connaissance de la solution analytique, ce qui constitue son point faible. Mais on a pu l'appliquer aux systèmes libres, cas où la solution est accessible, ensuite on a utilisé la méthode des perturbations pour aller plus loin.

Conclusion générale et perspectives

L'objectif de la première partie de cette thèse de doctorat est l'étude de certains aspects des corrections de la théorie de la relativité spéciale déformée (DSR) de Magueijo-Smolin, apportées à la mécanique quantique relativiste. En effet, leur théorie qui constitue une déformation des équations de la relativité de telle sorte qu'elles soient en accord avec le principe de l'invariance de l'échelle de Planck, modifie aussi les équations de Klein-Gordon et de Dirac en y introduisant des termes supplémentaires non négligeables dans cas des énergies très élevées.

Nous avons repris rapidement la démarche de S. Ghosh [31] qui consiste à retrouver les résultats de Magueijo-Smolin en partant du κ-espace des phases de Minkowski dont l'algèbre de Lorentz associée reste covariante, même après la déformation des crochets de Poisson fondamentaux relatifs aux coordonnées et moments conjugués. En se servant du premier théorème fondamental de Lie, nous avons obtenu dans un premier temps, la transformation déformée finie des moments conjugués dans le cadre de la DSR, dont le caractère non linéaire fait en sorte qu'elle garde invariante l'énergie de Planck. La relation de dispersion énergie-impulsion elle aussi a subi une déformation assurant sa covariance sous la nouvelle transformation. Le résultat est la relation de Magueijo-Smolin identique à la relation classique dans le cas des particules sans masse.

La transformation relative aux coordonnées obtenue dans le cadre de la relativité spéciale déformée est caractérisée par sa dépendance des moments conjugués, ce qui rend la cinématique et la dynamique inséparables, contrairement à la relativité restreinte. La loi de composition des vitesses qui en découle ne pose aucun problème car elle est identique au cas relativiste, ainsi l'invariance de la célérité de la lumière dans le vide est assurée.

Grâce aux variables canoniques obéissant à des crochets de Poisson non déformés et se transformant suivant une transformation de Lorentz ordinaire, nous avons montrer que le passage entre la relativité spéciale déformée et la relativité restreinte se fait d'une façon naturelle et immédiate. L'étude des transformations non canoniques faite juste après, nous a permis de constater qu'elles peuvent être à l'origine des crochets déformés qui sont à la base de la DSR et de la mécanique quantique non commutative.

L'équation de Dirac déformée constitue une bonne illustration de l'utilité des variables canoniques : écrite d'abord dans l'espace des impulsions, on a pu la résoudre à l'aide d'une transformation de Foldy-Wouthuysen, ce qui nous a permis de calculer son spectre d'énergie. Les résultats ont été en accord avec la relation de dispersion de Magueijo-Smolin, et la conclusion fut qu'effectivement, cette équation permet bien de décrire une particule et son antiparticule de spin 1/2.

Par la suite, nous avons écrit une équation de Klein-Gordon et une équation de Dirac déformées mais cette fois-ci dans l'espace des positions en utilisant un principe de correspondance conçu à partir des crochets de Poisson déformés qui sont à la base de la DSR. Pour vérifier la validité de notre approche, nous avons cherché des solutions sous forme d'ondes planes et le résultat fut l'obtention des équations déjà écrites dans l'espace des impulsions qui contiennent la relation de Magueijo-Smolin. Après, Nous avons déterminé les courants conservés qui peuvent être interprétés comme une densité de charges dans le cas de l'équation de Klein-Gordon et comme une densité de probabilité de présence dans le cas de l'équation de Dirac.

Dans la deuxième partie de ce travail, l'objectif est l'étude des méthodes de quantification des systèmes décrits par des lagrangiens singuliers, ce qui donne naissance aux systèmes hamiltoniens avec contraintes. En effet, nous avons essayé de comprendre les principes de base des méthodes de Dirac et de Faddeev-Jackiw en commençant par montrer leur nécessité à la compréhension de ce genre de systèmes. Avec ces dernières, les crochets Poisson cèdent leur place aux crochets de Dirac qui sont mieux adaptés à la présence des contraintes comme le montre les exemples nombreux qu'on a étudiés. Ces crochets permettent de procéder à une quantification canonique, et du coup, ils peuvent être interprétés comme une origine possible de la mécanique quantique non commutative, en plus des transformations non canoniques.

L'apport principal de notre travail est l'élaboration d'une approche alternative aux précédentes, appelée "méthode des constantes d'intégration (CI)". Comme son nom l'indique, l'idée est l'utilisation directe des constantes d'intégration de la solution générale comme moyen d'aboutir aux crochets de Dirac. Après avoir expliqué son fondement mathématique, nous avons pu d'abord l'appliquer à des systèmes réguliers afin de démontrer qu'elle redonne les crochets de Poisson bien connus en mécanique analytique. L'étape suivante était l'application avec succès de cette méthode aux systèmes avec contraintes de tous genres afin de retrouver les crochets de Dirac qu'on aurait pu avoir avec les autres approches.

La théorie quantique des champs a fait l'objet d'une application de la méthode des constantes d'intégration. En effet, rien qu'avec les solutions des champs libres, nous avons redérivé facilement les relations de commutation relatives aux opérateurs de création et d'annihilation, aussi bien dans le cas du champ spinoriel de Dirac que du champ vectoriel de Maxwell. Dans un dernier temps, nous avons donné une version perturbée de notre

approche afin qu'elle soit utile et utilisable dans le cas des systèmes qu'on peut résoudre par un développement en séries perturbatives.

Tels sont les résultats les plus importants de notre travail d'une manière générale. Maintenant, il y a certaines questions qu'on peut se poser concernant le même sujet qui vont nous servir de perspectives :

* L'importance de l'échelle de Planck est démontrée par les théories de la gravité quantique, alors : Peut-on déduire la relativité spéciale déformée à partir de la théorie de la gravité quantique ?

* Comment faire de la théorie quantique des champs en respectant la symétrie de la relativité spéciale déformée ? Et qu'apportera-t-elle à la physique des particules ?

* La méthode des constantes d'intégration, n'est-elle pas applicable en relativité générale dans le cas du champ gravitationnel faible (gravité linéaire) ?

* Comment rendre la méthode des constantes d'intégration applicable aux systèmes hamiltoniens avec contraintes non intégrables ?

* Est-il possible de déterminer les crochets de Dirac relatifs à un système donné sans avoir besoin ni d'un lagrangien ni d'un hamiltonien, peut-être uniquement en utilisant la solution générale ?

* Existe-t-il un lien entre notre méthode des constantes d'intégration et les intégrales de chemins ?

Bibliographie

[1] J. Bass, *Cours de mathématique, Tome II*, Masson (1978).

[2] P. Szekeres, *Modern mathematical physics*, Cambridge university press (2004)

[3] S. Bayin, *Mathematical methods in science and engineering*, Wiley-Interscience (2006).

[4] J. E. Campbell, *Introductory treatise on Lie's theory*, Oxford clarendon press (1903).

[5] W. Bluman, C. Anco, *Symmetry and integration methods for differential équations*, Springer(2002)

[6] D. Sénéchal, *Introduction à la théorie des groupes de Lie*, (1997)

[7] M. Hulin, N. Hulin, L. Mousselin, *Relativité retreinte*, Dunod (1998).

[8] R. Aldrovandi, J. G. Pereira, *Classical fields*, IFT (2004).

[9] L. Landau, E. Lifchitz, *Théorie des champs*, Mir (1964).

[10] L. Landau, E. Lifchitz, *Electrodynamique quantique*, Mir (1973).

[11] P. A. M. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics*, Belfer Graduate School of Science (1964) ; and *Generalized Hamiltonian dynamics*, Canadian Journal of Mathematics (1950).

[12] A. Messiah, *Mécanique quantique*, Dunod (1960)

[13] H. Goldstein, C.Poole, J.Safko, *Classical mechanics*, Addison Wesley (1950).

[14] C. Ginoux, B. Silvestre-Brac, *Mécanique*, EDP Sciences (2004).

[15] A. COMTET, *L'équation de Dirac*, CCSd (2005).

[16] B. Thaller, *The Dirac equation*, Springer (1992).

[17] S. Weinberg, *The quantum theory of feilds, tome I*, Cambridge university press (1995)

[18] D. M. Gitman, I. V. Tyutin *Quantization of fields with constraints*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (1990).

[19] M. Henneaux, C. Teitelboim, *Quantization of gauge systems*, Princeton University Press Princeton, New Jersey (1994).

[20] H. J. W. Müller-Kirsten, *Introduction to Quantum Mechanics*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd (2006).

[21] W. Greiner, *Relativistic quantum mechanics, Wave equations* , Springer, third edition (2000).

[22] W. Greiner, J. Reinhardt, *Field Quantization* , Springer, (1995).

[23] R. S. Johnson, *Singular Perturbation Theory*, Springer (2004)

[24] L. Smolin, *Rien ne va plus en physique*, Dunod (2006).

[25] J. Magueijo, *Plus vite que la lumière*, Dunod (2003).

[26] J. Dyson, *Advanced quantum mechanics*, arXiv :quant-ph/0608140v1 (2006)

[27] L. L. Foldy, S. A. Wouthuysen, *On the Dirac Theory of Spin 1/2 Particles and Its Non-Relativistic Limit*, PHYS. REV., VOLUME 78, (1990)

[28] J. Magueijo, L. Smolin, *Lorentz invariance with an invariant energy scale*, arXiv :hep-th/0112090v2 (2001).

[29] J. Magueijo, L. Smolin, *Generalized Lorentz invariance with an invariant energy scale*, arXiv :gr-qc/0207085v1 (2002).

[30] J. Magueijo, D. Kimberly, J. Medeiros, *Non-linear relativity in position space*, arXiv :gr-qc/0303067v2 (2004).

[31] S. Ghosh, P. Pal, *Deformed special relativity and deformed symmetries in a canonical framework*, arXiv :hep-th/0702159v4 (2007).

[32] S. Ghosh, P. Gosselin, A. Bérard, H. Mohrbach, *Berry phase effects in the dynamics of Dirac electrons in doubly special relativity framework*, arXiv :hep-th/0709.0579v3 (2007).

[33] S. Ghosh, *Extended space duality in the noncommutative plane*, arXiv :hep-th/0409138v1 (2004).

[34] G. Amelino-Camelia, T. Piran, *Cosmic rays and TeV photons as probes of quantum properties of space-time*, arXiv :hep-ph/0006210v1 (2000).

[35] G. Amelino-Camelia, T. Piran, *Planck-scale deformation of Lorentz symmetry as a solution to the UHECR and the TeV-γ paradoxes*, arXiv :astro-ph/0008107v1 (2000).

[36] G. Amelino-Camelia, M. Arzano, *Coproduct and star product in field theories on Lie-algebra non-commutative space-times*, arXiv :hep-th/0105120v2 (2001).

[37] G. Amelino-Camelia, *Doubly-special relativity : first results and key open problems*, arXiv :gr-qc/0210063v1 (2002).

[38] G. Amelino-Camelia, *Doubly special relativity*, arXiv :gr-qc/0207049v1 (2002).

[39] G. Amelino-Camelia, A. Agostini, M. Arzano, *Dirac spinors for doubly special relativity and κ-minkowski noncommutative spacetime*, arXiv :gr-qc/0207003v2 (2003).

[40] M. Takeda et al., *Energy determination in the Akeno Giant Air Shower Array experiment*, Astropart. Phys. 19 , 447 (2003).

[41] R.U. Abbasi and al., *First Observation of the Greisen-Zatsepin-Kuzmin Suppression.* ArXiv :astro-ph/0703099v2 (2008).

[42] J. Abraham and al., *Measurement of the energy spectrum of cosmic rays above* 10^{18} *eV using the Pierre Auger Observatory.* ArViv : [Astro-Ph,HE] 1002.1975v1 (2010).

[43] T. Abu-Zayyad and al., *The Cosmic Ray Energy Spectrum Observed with the Surface Detector of the Telescope Array Experiment*. ArXiv : [Astro-Ph,HE] 1205.5067v3 (2013).

[44] S. Mignemi, *Transformations of coordinates and Hamiltonian formalism in deformed Special Relativity*, arXiv :gr-qc/0304029v1 (2003).

[45] S. Mignemi, *On the definition of velocity in theories with two observer-independent scales*, arXiv :hep-th/0302065v1 (2003).

[46] Z. Belhadi, F. Ménas, A. Bérard, , P. Gosselin, H. Mohrbach, *Dirac equation in the magueijo–smolin approach of doubly special relativity*, International Journal of Modern Physics A, 27, 1250031 (2012)

[47] A. Bérard, Z. Belhadi, F. Ménas, P. Gosselin, Y. Grandati and H. Mohrbach, *Application of the Doubly Special Relativity to the Dirac equation formalism*,Journal of Physics : Conference Series 361 (2012) 012038.

[48] J. Lukierski, A. Nowicki, *Doubly special relativity versus κ-deformation of relativistic kinematics*, arXiv :hep-th/0203065v3 (2003)

[49] J. Lukierski, P. Kosinski, P. Maslanka, *Local D=4 field theory on κ–deformed Minkowski space*, arXiv :hep-th/9902037v1 (1999).

[50] J. Lukierski, P. Kosinski, P. Maslanka, *Local field theory on κ-Minkowski space, star products and noncommutative translations*, arXiv :hep-th/0009120v2 (2000).

[51] J. Lukierski, *Quantum deformations of relativistic symmetries : some recent developments*, arXiv :hep-th/0412145v1 (2004).

[52] J. Lukierski, A. Nowicki, *Four classes of modified relativistic symmetry transformations*, arXiv :hep-th/0210111v1 (2002).

[53] J. Lukierski, *Relation between quantum κ-Poincaré framework and doubly special relativity*, arXiv :hep-th/0402117v2 (2004).

[54] J. Kowalski.Glikman, *Introduction to doubly special relativity*, arXiv :hep-th/0405273v1 (2004).

[55] J. Kowalski–Glikman, S. Nowak, *Doubly special relativity theories as different bases of κ–Poincaré algebra*, arXiv :hep-th/0203040v1 (2002).

[56] J. Kowalski-Glikman, M. Daszkiewicz,K.Imilkowska, S. Nowak, *Scalar field theory on κ-Minkowski space-time and doubly special relativity*, arXiv :hep-th/0410058v3 (2005).

[57] J. Kowalski-Glikman, S. Nowak, *Non-commutative space-time of doubly special relativity theories*, arXiv :hep-th/0204245v1 (2002).

[58] J. Kowalski–Glikman, M. Daszkiewicz, K. Imilkowska, *Velocity of particles in doubly special relativity*, arXiv :hep-th/0304027v1 (2003).

[59] A. Bérard, H. Mohrbach, J. Lages, P. Gosselin, Y. Grandati, H. Boumrar, F. Ménas, *From Feynman proof of Maxwell equations to noncommutative quantum mechanics*, Journal of Physics : Conference Series 70 (2007) 012004.

[60] A. Bérard, H. Mohrbach, P. Gosselin, *Lorentz-covariant hamiltonian formalism*, arXiv :physics/0004005v1 (2000).

[61] J. Lages, A. Bérard, H. Mohrbach, Y. Grandati, P. Gosselin, *Noncommutative quantum mechanics viewed from Feynman formalism*, (2006).

[62] A. Bérard, J. Lages, H. Mohrbach, *Restoration of angular Lie algebra symmetries from a covariant hamiltonian*, arXiv :gr-qc/0110005v1 (2001).

[63] A. Bérard, Y. Grandati and H. Mohrbach, *Dirac monopole with Feynman brackets*, Phys. Lett. A. **254** (1999) 133 ; *Magnetic Monopole in the Feynman derivation of Maxwell equations*, J. Math. Phys. **40** (1999) 3732.

[64] W. Bietenholz, *Cosmic rays and the search for a lorentz invariance violation*, arXiv :hep-ph/0806.3713v1 (2008).

[65] J-M. Liu, *Motivations to modify special relativity*, arXiv :physics/0205011 (2002).

[66] V. Ahluwalia-Khalilova, *Fermions, bosons, and locality in special relativity with two invariant scales*, arXiv :gr-qc/0207004v4 (2003).

[67] A. Granik, *Magueijo-Smolin transformation as a consequence of a specific definition of mass,velocity, and the upper limit on energy*, arXiv :hep-th/0207113v6 (2008).

[68] A. A. Deriglazov, *Poincaré covariant mechanics on noncommutative space*, arXiv :hep-th/0211105v3 (2003).

[69] A. Pinzul, A. Stern, *Space-time noncommutativity from particle mechanics*, arXiv :hep-th/0402220v2 (2004).

[70] R. Aloisio, J. M. Carmona, J.L.Cortés, A.Galante, A.F.Grillo, F. Méndez, *Particle and antiparticle sectors in DSR1 and κ-Minkowski space-time*, arXiv :hep-th/0404111v2 (2004).

[71] N. Jafari,A. Shariati, *Doubly special relativity : a new relativity or not ?* , arXiv :gr-qc/0602075v1 (2006).

[72] S. Meljanac,M. Stojic, *New realizations of Lie algebra kappa-deformed Euclidean space*, arXiv :hep-th/0605133v2 (2007).

[73] F. Girelli, S. Liberati, L. Sindoni, *Planck-scale modified dispersion relations and Finsler geometry*, arXiv :gr-qc/0611024v3 (2007).

[74] S. Meljanac, S. Kresic-Juric, M. Stojic, *Covariant realizations of kappa-deformed space*, Eur. Phys. J. C 51, 229–240 (2007).

[75] G. D. Acosta, M. Kirchbach, *Massive gauge feilds and the Planck scale*, Foundations of Physics Letters, Vol. 18, No. 2, (2005).

[76] X. Wu, S. Gao, *Position space of doubly special relativity*, arXiv :gr-qc/0311009v2 (2003).

[77] L. Gonzalez-Mestres, *Deformed lorentz symmetry and high-energy astrophysics (II)*, arXiv :hep-th/0208064v1 (2002).

[78] D. V. Ahluwalia-Khalilova, *Operational indistinguishabilty of doubly special relativities from special relativity*, arXiv :gr-qc/0212128v3 (2005).

[79] P. Kosinski, P. Maslanka, *On the definition of velocity in doubly special relativity theories*, arXiv :hep-th/0211057v2 (2002).

[80] S. Tanimura, *Relativistic generalization and extension to the non-abelian gauge theory of Feynman's proof of the maxwell equations*, arXiv :hep-th/9306066v1 (1993).

[81] L. H. Kauffman, *Non-commutative worlds - A summary*, arXiv :quant-ph/0503198v2 (2005).

[82] E. T. G. Alvarez, F. H. Gaioli, *Covariant hamiltonian formalisms for particles and antiparticles*, International Journal of Theoretical Physics, Vol. 38, No. 1, (1999).

[83] J. F. Carinena, H. Figueroa, *Feynman problem in the noncommutative case*, arXiv :hep-th/0606008 v1 (2006).

[84] Z. K. Silagadze, *Feynman's derivation of Maxwell equations and extra dimensions*, arXiv :hep-ph/0106235 v2 (2002).

[85] Z. Belhadi, F. Menas, A. Bérard and H. Mohrbach, *Quantization of soluble classical constrained systems*, Annals of Physics, 2014, vol. 351, p. 426-443.

[86] J. L. Anderson and P. G. Bergmann, Phys. Rev. **83** 1018 (1951). P. G. Bergmann, I. Goldberg, *Dirac bracket transformations in phase space*, Phys. Rev., (1955). P. G. Bergmann, *Hamilton-Jacobi and Schrödinger Theory in Theories with First-Class Hamiltonian Constraints*, Phys. Rev., (1966). -

[87] L. Faddeev and R. Jackiw, *Hamiltonian Reduction of Unconstraint and Constraint Systems* Phys. Rev. Lett. **60** (1988) 1692.

[88] J. Barcelos-Neto and N. R. F. Braga, *Symplectic analysis of a Dirac constrained theory*, J. Math.Phys. **35** (1994) 3497.

[89] L. Liao, Y. C. Huang, *Non-equivalence of Faddeev–Jackiw method and Dirac–Bergmann algorithm and the modification of Faddeev–Jackiw method for keeping the equivalence*, Annals of Physics 322 (2007) 2469–2484

[90] J. M. Souriau, *Structures des systèmes dynamiques*, Paris, Dunod (1969) ; *Structure of Dynamical Systems, a Symplectic View of Physics*, Birkäuser (1997).

[91] l. Martina, *Dynamics with exotic symmetries*, Jour. Phys. Conf. Ser. **343** (2012) 012072.

[92] F. Dyson, Am. J. Phys. **58**, 209 (1990).

[93] J. Douglas, *Solution of the inverse problem of the calculus of variations*, Trans. Am. Math. Soc. **50** (1941) 71.

[94] S. Hojman and L.F. Urrutia, "On the inverse problem of the calculus of variations", J. Math. Phys. **22** (1981) 1896.

[95] S. Hojman and L. C. Shepley, *No Lagrangian, no quantization !*, J. Math. Phys. **32** (1991) 142.

[96] U. Kulshreshtha *Hamiltonian formulation of a theory with constraints*, J. Math. Phys. **33** (1991) 633 and J. Math. Phys. **33** (1991) 4066.

[97] N. H. Christ and T. D. Lee, *Operator ordering and Feynman rules in gauge theories*, PHYS. REV. D, VOLUME 22,(1980).

[98] J. F. Cariñena, M. F. Rañada, M.Santander, *A nonlinear deformation of the isotonic oscillator and the SMORODINSKI-WINTERNITZ system : integrability and superintegrability*, R and C Dynamics (10.1070/RD2005v010n04ABEH000324).

[99] Masaru DOl, Tsuneyuki KOT ANI and Eiichi T AKASUGI, *Double Beta Decay and Majorana Neutrino* , Progress of Theoretical Physics Supplement No. 83, (1985).

[100] Z. Belhadi, *Introduction à la théorie de la relativité spéciale déformée*, Mémoire de Magister, Université de Béjaia (2009).

[101] L. ICHALLAL, Z. Belhadi, *Introduction aux Systèmes Hamiltoniens avec Contraintes*, Mémoire de master, Université de Béjaia (2013).