

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou

Faculté des Sciences

Département de Physique

THESE DE DOCTORAT

Spécialité : Physique

Option : Physique Atomique

Présentée par :

DEGHICHE Djamel

Sujet : Modélisation d'un piège magnéto-optique fortement saturé et étude de l'atténuation des fermions.

Jury :

Président : Mouloud BENAKKI Professeur UMMTO de Tizi-Ouzou

Rapporteur : Omar LAMROUS Professeur UMMTO de Tizi-Ouzou

Examineurs : Mohamed KHELKHAL Maître de conférence USTL de Lille (France)

Omar ZIANE Professeur USTHB d'Alger

Nadir BELDJOUDI Professeur USTHB d'Alger

Abdelhamid ZIANE Professeur UMMTO de Tizi-Ouzou

Soutenue le 13 /02 /2011

Résumé : Dans cette thèse, nous avons, d'une part, effectué le calcul numérique des taux d'atténuation des fermions en Electrodynamique quantique à température finie, d'autre part, nous avons réalisé et modélisé un piège magnéto-optique (PMO) fortement saturé. La première partie du travail traite du calcul numérique du taux d'atténuation des fermions dans un bain thermique en utilisant le programme de resomme des Hard Thermal Loops (HTL). Une fois le taux d'atténuation est développé selon le moment externe jusqu'au deuxième ordre, les coefficients sont calculés numériquement. Les ordres zéro et un sont trouvés finis alors que l'ordre deux souffre de divergences infrarouges logarithmiques. La deuxième partie de la thèse traite de la modélisation basée sur une description locale en espace et en vitesse d'un PMO et d'une simulation qui reprend la configuration et les paramètres expérimentaux. Un modèle unidimensionnel local de piège à faisceaux indépendants a donc été élaboré. La motivation initiale est de pouvoir décrire certaines situations instables observées dans des systèmes à faisceaux contrapropageants d'égales intensités. Ces mêmes comportements du nuage d'atomes froids ont d'ailleurs été observés dans les systèmes à faisceaux rétro-réfléchis et décrits par des modèles qui, eux, se basent sur des grandeurs globales. En plus du fait que l'effet d'ombre soit traité localement, notre modèle tient compte de la diffusion multiple des photons de fluorescence.

Mots clés : Taux d'atténuation, Théorie des champs à température finie, divergence infrarouge, Piège Magnéto-Optique, Refroidissement d'atomes, Piégeage, Diode laser, Saturation, Diffusion multiple, Effet d'ombre.

Abstract : In this thesis we carried out the numerical calculation of damping rate of fermions in quantum electrodynamics at finite temperature and then we modeled a magneto-optical trap (MOT) highly saturated. The first part deals with the numerical calculation of the damping rate of fermions in a thermal background using the hard-thermal-loop summation scheme. Once the damping rate is developed to second order in powers of the external momentum, the coefficients are calculated numerically. We find the coefficients of zeroth and first orders finite whereas that of second-order logarithmically infrared sensitive. The second part of the thesis concerns the numerical modeling of MOT based on a local description in space and velocity. A local 1D model of trap considering independent beams has been developed. Our motivation is to describe certain unstable situations observed in these systems. The same behavior of the cloud of cold atoms have also been observed in systems with retro-reflective beams and which described by models based on global quantities. Besides the fact that the shadow effect is studied locally, our model takes into account the multiple scattering of fluorescence photons.

Key Words : Damping rate, Finite temperature field theory, Hard Thermal Loops, infrared divergences, Magneto-Optical Trap, Cooling atoms, Trapping, Laser diode, Saturation, Multiple scattering, Shadow effect.

Remerciements

Je tiens à exprimer ma gratitude à O. Lamrous pour son indéfectible soutien le long de la préparation de cette thèse. J'ai réalisé ce travail au laboratoire de Physique et Chimie Quantique (LPCQ) de Tizi-Ouzou. C'est donc tout naturellement que je remercie ses directeurs successifs, M. Amarouche et S. Bouarab, qui m'y ont accueilli et m'ont fait bénéficier de conditions propices à la recherche.

La partie consacrée au calcul des taux d'atténuation a été réalisée en coopération avec A. abada et K. Bouakaz. Je reconnais que les échanges de discussions ont été plus que bénéfiques. Je les remercie donc vivement. La deuxième partie qui est dédiée au refroidissement d'atomes par laser a été faite en collaboration avec l'équipe atomes froids du Laboratoire de Physique Atomes et Molécules (PhLAM) de lille, je remercie naturellement D. Hennequin et P. Verkerk de m'avoir accueilli dans leur équipe pendant mon stage de formation en France.

Je voudrais au passage remercier tous les membres des deux laboratoires, PhLAM et LPCQ, que j'ai rencontrés, chercheurs, étudiants, personnels techniques ou administratifs, et qui m'ont aidé à réaliser ce travail. Je remercie également l'équipe du département de physique de l'université Mouloud Mammeri, C. Chemrouk et M. Zemirli de m'avoir porté leur soutien.

La compagnie de S. Outioua et de M. Djouder a été un soutien plus que plaisant pendant toute la vie au laboratoire que ça soit au LPCQ à Tizi-ouzou ou au PhLAM à Lille. Je leur suis également très reconnaissant pour la relecture fructueuse du

manuscrit.

C'est un honneur de pouvoir remercier M. Benakki qui a accepté de faire partie du jury de soutenance. Toute ma gratitude va également à l'ensemble des examinateurs M. Khelkhal, O. Ziane, N. Beldjoudi et A. Ziane qui ont consacré une partie de leur temps à la lecture de ce manuscrit.

Enfin, c'est avec une tendresse infinie que je remercie ma famille, de mes parents à mes neveux ainsi que mon épouse, qui, d'une manière ou d'une autre, m'ont encouragé et soutenu pendant ces longues années de thèse. Merci à tous ceux que j'ai malencontreusement oublié de citer.

Table des matières

Remerciements	4
Introduction	9
I Taux d'atténuation des fermions en électrodynamique quantique à température finie	18
1 Éléments de l'électrodynamique quantique à température finie et les Hard Thermal Loops	19
1.1 Introduction	19
1.2 L'électrodynamique quantique dans le formalisme à temps imaginaire	20
1.2.1 Fréquences de Matsubara	21
1.2.2 Propagateurs et vertex d'interaction de QED	23
1.2.3 Renormalisation à température finie	24
1.3 Extraction des Hard Thermal Loops	25
1.3.1 Nécessité de la resomme HTL	25
1.3.2 Les différentes HTL	27
1.4 Propagateurs et vertices effectifs	33
2 Calcul des taux d'atténuation des fermions	37
2.1 Taux d'atténuation et self énergie effective	38
2.2 Partie imaginaire de la self énergie effective	41
2.2.1 Calcul de $\text{Im}^* \Sigma_1$	41
2.2.2 Calcul de $\text{Im}^* \Sigma_2$	48
2.3 Calcul numérique des taux d'atténuation	49
2.4 Conclusion	57

II Modélisation d'un piège magnéto-optique unidimensionnel fortement saturé 59

3	Eléments théoriques du refroidissement et du piégeage d'atomes par laser	60
3.1	Introduction	60
3.2	L'atome à deux niveaux	61
3.3	Forces radiatives agissant sur les atomes à deux niveaux	63
3.3.1	Force dissipative ou force de pression de radiation	64
3.3.2	Force dipolaire ou force réactive	65
3.4	La mélasse optique	66
3.5	Le piège magnéto-optique	68
4	Dispositif expérimental	72
4.1	Introduction	72
4.2	L'atome de Rubidium	73
4.3	Stabilisation des diodes lasers	76
4.3.1	Le laser maître	78
4.3.2	Injection des esclaves	82
4.4	La table du piège	94
5	Le modèle et les résultats des simulations	100
5.1	Introduction	100
5.2	Temps caractéristiques du système	101
5.3	Solutions stationnaires des équations de Bloch	103
5.4	Description du piège magnéto-optique et équation de Fokker-Planck .	109
5.4.1	Effets collectifs	110
5.4.2	Equation de Fokker-Planck	115
5.4.3	Equations des intensités	120
5.5	Résultats des simulations et discussions	121
5.5.1	Effets de la saturation	121
5.5.2	Etude en fonction du désaccord	131
5.5.3	Effet de la diffusion multiple	134
5.5.4	Effet de la disposition des faisceaux	138
5.6	Conclusion	142
	Conclusion générale	144

A	Comment déterminer les Hard Thermal Loops (HTL) ?	147
A.1	Sommation sur les fréquences de Matsubara	148
A.2	Intégration	150
A.2.1	Les self-énergies	150
A.2.2	Les vertices	151
B	Equations de Bloch optiques pour un atome à deux niveaux	153
	Bibliographie	159

Introduction

Ce travail de thèse comporte deux parties : le calcul numérique des taux d'atténuation des fermions à température finie et la modélisation d'un piège magnéto-optique.

La première partie de la thèse concerne le calcul des taux d'atténuation des fermions dans un bain thermique (à température finie) dans le cadre de la resomme des Hard Thermal Loops proposée pour la première fois par Braaten et Pisarski [1]. Cette méthode est basée sur le calcul d'une classe de diagrammes à une boucle (dus au bain thermique) en plus des diagrammes de Feynman (à température nulle).

Pour la compréhension de la phase quark gluon, les quantités physiques importantes à déterminer sont les relations de dispersion des différentes quasi-particules. Celles-ci sont déterminées à l'ordre le plus bas gT (g est la constante de couplage de la Chromodynamique Quantique QCD) en utilisant l'expansion standard (digrammes de Feynman) pour les quarks [2] et pour les gluons [3]. A cet ordre de la perturbation, ces quantités sont indépendantes de la jauge utilisée, ce qui n'est pas le cas à l'ordre g^2T [4]. Le taux d'atténuation est une autre quantité qui permet de comprendre les caractéristiques de la phase plasma quark gluon. Pour qu'il soit significatif, il doit être fini et positif. Dans la littérature, différents calculs des taux d'atténuation des gluons transverses de moment nul ont été menés [5, 6, 7, 8, 9], les résultats différent et dépendent explicitement de la jauge choisie. Pisarski [10] a noté que l'expansion standard en boucles (à température nulle) n'est pas nécessairement une expansion suivant les puissances de la constante de couplage g . Braaten et Pisarski [1] ont développé une

expansion effective qui tient compte de la resomme de diagrammes à une boucle. En utilisant cette méthode, le taux d'atténuation des gluons transverses de moment nul devient fini, positif et indépendant de la jauge. Un nombre de calculs subséquent de quantités physiques a alors été effectué en utilisant l'expansion effective de Braaten et Pisarski, par exemple, le calcul du taux d'atténuation des quarks de moment nul en Chromodynamique Quantique (QCD) à haute température ; le résultat obtenu est indépendant de la jauge [11]. Un autre exemple est la détermination du taux d'atténuation d'un muon dans un plasma d'Electrodynamique Quantique (QED) qui se trouve quadratiquement divergent en se servant de l'expansion standard, alors qu'avec la resomme des Hard Thermal Loops (HTL), la divergence devient logarithmique [12]. Une autre entité intéressante est la perte d'énergie dans un plasma QCD ; après qu'elle eut été logarithmique en théorie standard, elle devient finie en utilisant l'expansion effective [12]. Il ressort de ces calculs que pour des moments élevés, le cadre HTL semble être adéquat et suffisant pour mettre en évidence quelques propriétés caractéristiques du plasma quark-gluon. Néanmoins, le domaine infrarouge semble poser un problème que la resomme HTL seule n'est pas en mesure de résoudre. En effet, dans les théories de jauge en général, l'invariance de jauge fait que les bosons de jauge n'ont pas de masse [13]. En conséquence, le propagateur bosonique est sensible dans l'infrarouge. A température finie, le problème s'accroît car la distribution de Bose Einstein varie en $1/k$ (k : moment du boson), ce qui accentue le comportement divergent [14].

L'utilisation de la méthode de resomme HTL dans les calculs des taux d'atténuation en Chromodynamique Quantique (QCD) révèle des divergences infrarouges. A l'échelle g^2T , l'expression analytique du taux d'atténuation des gluons transverses $\gamma_t(p)$ est obtenue dans [15], mais le résultat est divergent. De même le taux d'atténuation $\gamma_t(0)$ des gluons longitudinaux a été calculé par Abada et *al.* dans [16], il est également divergent dans l'infrarouge. Quant aux quarks, les divergences commencent à l'ordre deux [17].

Ces travaux montrent donc l'existence de divergences infrarouges en QCD à haute température. Il est alors légitime de se poser la question suivante : est-ce que ces divergences décrivent un ou plusieurs phénomènes physiques réels, ou bien sont-elles simplement dues à la méthode de calcul utilisée ?

Ces divergences rencontrées en QCD nous ont conduit à utiliser une théorie de jauge abélienne, l'Electrodynamique Quantique (QED). Dans le contexte de la théorie des champs, le taux d'atténuation se détermine à partir de la self énergie effective fermionique. Le calcul numérique complet du taux d'atténuation des fermions en QED à température finie a été effectué sous forme d'un développement en puissance du moment ultrasoft p du fermion. Une partie qui retrace l'essentiel de ce travail lui sera consacrée.

La deuxième partie est consacrée au refroidissement des atomes par laser. Ce domaine de la physique a connu ces dernières années un intérêt considérable tant pour répondre à des questions fondamentales que pour trouver des applications en

technologie moderne. Les travaux sur les atomes froids ont été couronnés par deux prix Nobel de physique ; le premier a été attribué, en 1997, à Steven Chu, Claude Cohen Tanoudji et William Phillips sur les nouveaux mécanismes de refroidissement par laser, les températures prédites sont de l'ordre de la température de recul [18, 19] ; le deuxième a été décerné en 2001 à Eric Cornell, Wolfgang Ketterle et Carl Wieman pour la première réalisation du condensat de Bose-Einstein [20, 21].

La question fondamentale est celle de savoir pourquoi refroidir et piéger les atomes ? Il est bien connu qu'en excitant les degrés de liberté internes de l'atome tels que le mouvement des électrons, l'orientation de leurs spins et celle du spin du noyau, on doit mesurer avec la meilleure précision possible les niveaux d'énergie. L'Electrodynamique Quantique, la théorie des champs qui permet d'étudier les interactions entre les atomes et les photons, est d'autant plus exacte que la mesure des niveaux d'énergie est précise. Cependant, les niveaux d'énergie des atomes sont affectés par leur agitation thermique. Selon que les atomes en mouvement s'éloignent ou se rapprochent de l'instrument de mesure, l'effet Doppler dilate ou contracte la longueur d'onde des photons. Réduire l'agitation thermique revient à réduire l'élargissement des raies spectrales d'émission ou d'absorption. Refroidir les atomes permet par conséquent d'avoir une meilleure précision sur la mesure des niveaux [22].

L'idée de base du refroidissement est d'utiliser les trois processus introduits par Albert Einstein en 1917 [23] : l'absorption, l'émission spontanée et l'émission stimulée. Ces processus, connus de tous les physiciens, se manifestant sous forme d'échanges

d'impulsions entre les atomes et les photons, rendent possible le refroidissement d'atomes. En 1933, Frisch met en évidence expérimentalement la force de pression de radiation [24], il observe la déflexion de jets atomiques par la lumière. Ces expériences ont été reprises en France dans les années 1970 par Picqué et Vialle [25]. Dès 1950, Alfred Kastler parle déjà de possibilité qu'un champ lumineux puisse baisser la température d'une vapeur atomique [26]. En 1975, T. Hänsch et A. Schawlow proposèrent une méthode de refroidissement de vapeur atomique neutre à une température proche du zéro absolu [27]. Puis au début des années 1980, W. Phillips et *al.* arrivèrent à ralentir un jet atomique par la force de pression de radiation [28]. Et c'est en 1985 que S. Chu et *al.* ont réalisé la première mélasse optique [29].

Jusque là les atomes sont refroidis mais très délicatement parce qu'ils sont beaucoup trop rapides. Par exemple, en sortant du four, les atomes ont des vitesses de plusieurs centaines de mètres par seconde, ils sont donc difficilement retenus dans une mélasse. Il faudrait, au préalable, les ralentir avec un autre faisceau laser. Encore mieux, Jean Dalibard proposa de superposer à la mélasse, constituée par les deux faisceaux, un champ magnétique dont le gradient est constant et faible, et qui s'annule à l'endroit où l'on veut piéger les atomes. Grâce à ce dispositif connu sous le nom de Piège Magnéto-Optique (PMO), on peut utiliser une simple cellule en verre contenant une vapeur atomique à la température ambiante pour la capturer et la refroidir. Le premier Piège Magnéto-Optique a été expérimenté en 1987 [30]. En 1988, W. Phillips et son équipe effectuèrent des mesures précises de températures dans les

PMO et montrèrent que la température mesurée est bien inférieure à la limite de température Doppler prédite en 1985 par l'équipe de S. Chu [31]. Et depuis, les travaux ont été accélérés par les trois écoles, dirigées respectivement par W. Phillips au NBS à Washington, S. Chu à l'université de Stanford et C. Cohen Tannoudji à l'ENS de Paris. Une véritable course qui leur a valu le Prix Nobel de Physique en 1997.

Récemment, plusieurs secteurs s'intéressent à ce domaine de la physique. En physique fondamentale, la plus importante découverte est l'observation du premier condensat de Bose-Einstein proposé conjointement par Nathan Bose [32] et Albert Einstein [33]. Il était jusqu'à 1995 un rêve de théoricien. Au départ cela concernait les photons puis il a été généralisé à toutes les familles de bosons. Ces particules sont animées d'un "instinct grégaire", plus le nombre de particules dans un état donné est grand plus la probabilité que les autres particules rejoignant cet état est grande. En technologie moderne, on peut citer les applications dans les domaines des horloges atomiques [34, 35], de la lithographie avec des atomes froids [36] et de l'interférométrie atomique [37]. Dans le futur, la réalisation d'un ordinateur quantique reste un des objectifs les plus attendus. Cet ordinateur serait capable d'effectuer des opérations hors de portée des ordinateurs classiques [38, 39, 40, 41].

Dans l'espoir de réaliser la première porte logique quantique¹, la piste qui semble prometteuse est la réalisation de réseaux de pièges annulaires pour les atomes de césium [42]. Les difficultés rencontrées en réalisant un réseau de pièges pour ces atomes

¹Ce travail de thèse s'insère dans le cadre du projet de recherche CNEPRU N° D00520060049 intitulé "Réalisation d'une porte logique quantique avec des atomes froids".

ont poussé les chercheurs sur les atomes froids de Lille en France à opter pour un autre atome alcalin. Une attention particulière est portée sur le rubidium 87, un élément qui semble intéressant puisqu'il avait fait l'objet de la première réalisation expérimentale du condensat de Bose-Einstein [20].

Mais avant de se projeter dans ces horizons lointains, plusieurs études doivent s'effectuer. En premier lieu, les instabilités dans les pièges magnéto-optiques. Celles-ci constituent des contraintes à éviter. Elles se manifestent par des variations brutales de la forme du piège [43, 44]. Ces dernières années, un modèle a été développé pour étudier les instabilités dans les Pièges Magnéto-Optiques à faisceaux rétro-réfléchis. La première formulation de ce modèle [45], consiste à supposer le nuage d'atomes froids comme ponctuel. Les grandeurs intéressantes à étudier étaient le centre de masse et le nombre d'atomes dans le nuage. Bien qu'il ne tienne compte que d'un nombre restreint d'ingrédients physiques, il arrive à expliquer, du moins qualitativement, certaines situations instables observées ; les instabilités stochastiques ont été étudiées par D. Hennequin [46] et les instabilités déterministes par A. Di Stéfano [47, 48]. Néanmoins, ce modèle présente des insuffisances. C'est un modèle global ; le PMO est considéré dans sa globalité (en espace et en vitesse). Le fait que le nuage d'atomes froids dans la géométrie à faisceaux rétro-réfléchis soit déplacé fait que certaines variables globales telles que la position du centre de masse Z et le nombre total d'atome N permettent de caractériser quelques instabilités. Dans le passage à une configuration à faisceaux indépendants, la symétrie du système fait que les in-

stabilités ne pourraient être étudiées par la variables globales (Z et N). Elaborer un modèle plus complet qui tiendrait compte de effets collectifs locaux est indispensable, une bonne partie de la thèse y est consacrée.

Dans notre travail, la description de l'interaction atome-photons s'appuie sur un modèle de transition $J = 0 \rightarrow J = 1$ fortement saturée. L'intérêt de ce choix est de pouvoir calculer exactement les populations des niveaux sans avoir recourt à l'hypothèse de faible saturation et de ne pas tenir compte des effets sub-recul qui font intervenir un temps de vie plus grand que Γ^{-1} qui est la durée de vie du niveau excité.

Les effets de densité dus à la diffusion multiple, étudiés par Sesko [49], puis repris par Kaykovich [50] sont étudiés en détail dans cette thèse sous un aspect unidimensionnel. De plus, l'effet d'ombre qui a été traité globalement dans [45, 48] est repris mais avec un traitement local ; qui est indispensable dans la configuration à géométrie symétrique où les faisceaux lasers sont indépendants. Dans ce contexte, l'équation de Fokker Planck est écrite avec une expression complète de la force incluant l'effet d'ombre et la diffusion multiple. Enfin, la prise en compte des termes source et de relaxation nous permettra de décrire la capture des atomes et la relaxation du Piège Magnéto-Optique.

Nous avons choisi de structurer le manuscrit comme suit : dans la partie I, nous présentons les éléments de base de l'électrodynamique quantique dans le formalisme à temps imaginaire. Nous calculons ensuite le taux d'atténuation des fermions dans le cadre de l'électrodynamique quantique à température finie. Dans la partie II, après

l'introduction théorique du refroidissement d'atomes, nous décrivons le dispositif expérimental permettant la réalisation d'un piège magnéto-optique d'atomes de rubidium. Ce dispositif a été réalisé au laboratoire PhLAM de Lille. Dans cette partie, on mettra l'accent sur les systèmes lasers maîtres et esclaves et le montage du piège. Le dernier chapitre est dédié à la présentation du modèle utilisé ; les équations de Bloch optiques pour déduire les populations et les cohérences et l'équation de Fokker-Planck pour la distribution des vitesses ainsi que la densité spatiale des atomes du PMO. Cette équation étant couplée aux équations décrivant les intensités laser va nous servir de base pour l'étude du piège magnéto-optique.

Première partie

Taux d'atténuation des fermions en électrodynamique quantique à température finie

Chapitre 1

Eléments de l'électrodynamique quantique à température finie et les Hard Thermal Loops

1.1 Introduction

Comme il a été rappelé dans l'introduction, l'application de l'expansion en boucles de Feynman pour un système à haute température entraîne des difficultés. Kalashnikov semble être le premier à avoir noté que les taux d'atténuation des gluons de moments nuls, calculés dans le cadre de la QCD à haute température, dépendaient de la jauge choisie [4]. Pisarski a noté que ceci était indicatif du fait que ce genre de calculs n'était pas complet, i.e., que des contributions importantes ne sont pas prises

en compte. Autrement dit, l'expansion en boucle ne constituait pas réellement une expansion suivant les puissances de la constante de couplage [10]. Braaten et Pisarski ont alors développé une expansion effective qui tient compte de la resomme des Hard Thermal Loops (HTL). Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'extraction des HTL à partir des diagrammes à une boucle. Mais avant cela, on présentera l'essentiel de QED dans le formalisme à temps imaginaire. Le lecteur pourra se référer à la littérature sur ce sujet [14, 51] pour une étude systématique des théories de champs à température finie en général.

1.2 L'électrodynamique quantique dans le formalisme à temps imaginaire

L'étude des systèmes portés à température finie T dans le cadre de la théorie des champs [14, 51] nécessite la connaissance de la fonction de Green à deux points : le propagateur. Les deux approches standards sont utilisables : celle des intégrales de parcours et la méthode opératorielle. Contrairement aux systèmes hors équilibre où le formalisme à temps réel est indispensable [14], le formalisme à temps imaginaire est bien approprié à l'étude des systèmes en équilibre thermodynamique.

Considérons un système quantique en équilibre thermodynamique dans l'ensemble canonique. Son opérateur densité est donné par

$$\hat{\sigma}(\beta) = e^{-\beta\hat{H}}, \quad (1.1)$$

où \hat{H} est l'Hamiltonien du système et $\beta = \frac{1}{k_B T}$, avec k_B la constante de Boltzman¹.

La fonction de partition est définie à partir de la matrice densité par :

$$Z(\beta) = \text{Tr} \hat{\sigma}(\beta). \quad (1.2)$$

Ainsi, la valeur moyenne de tout opérateur $A(-i\tau)$ est donnée par :

$$\langle A(-i\tau) \rangle = Z^{-1}(\beta) \text{Tr}(\hat{\sigma}(\beta) A(-i\tau)), \quad (1.3)$$

où l'opérateur $A(-i\tau)$ est écrit dans la représentation de Heisenberg, il se déduit de l'opérateur de Schrödinger A par

$$A(-i\tau) = e^{H\tau} A e^{-H\tau}. \quad (1.4)$$

En utilisant (1.2) et les propriétés de cyclicité de la trace, on montre que [52] :

$$\langle A(-i\tau) B(-i\tau') \rangle = \langle B(-i\tau') A(-i(\tau - \beta)) \rangle. \quad (1.5)$$

Cette relation est appelée condition de Kubo-Martin-Schwinger (KMS). A partir de celle-ci découle la périodicité et l'anti-périodicité respectives des fonctions de Green bosonique et fermionique.

1.2.1 Fréquences de Matsubara

On définit la fonction de Green à deux points dans la représentation de Heisenberg par :

$$\Delta(\tau, \tau') = \langle \mathbf{P}_\tau(\phi(\tau) \phi^+(\tau')) \rangle_\beta. \quad (1.6)$$

¹Nous travaillons dans le système d'unités normalisées où $\hbar = 1$, $k_B = 1$ et $c = 1$.

L'opération ordre chronologique P_τ est sensible à la parité des champs. Elle est définie par :

$$P_\tau(\phi(\tau) \phi^+(\tau')) = \theta(\tau - \tau') \phi(\tau) \phi^+(\tau') \pm \theta(\tau' - \tau) \phi^+(\tau') \phi(\tau), \quad (1.7)$$

où les signes (\pm) correspondent respectivement aux champs bosonique et fermionique.

La différence essentielle par rapport au cas de la température nulle est que τ et τ' sont compris entre 0 et β . Ces fonctions de Green ne dépendent que de la différence des arguments [14]. Aussi, à partir des propriétés de la matrice densité, on montre que si $\Delta\tau < 0$:

$$\Delta(\Delta\tau) = \pm\Delta(\Delta\tau + \beta). \quad (1.8)$$

Puisque τ appartient à un intervalle fini, la transformée de Fourier se réduit à une sommation discrète de termes fréquentiels [52] :

$$\Delta(\omega_n) = \frac{1}{2} \int_{-\beta}^{+\beta} e^{i\omega_n\tau} \Delta(\tau) d\tau \text{ et } \Delta(\tau) = \frac{1}{\beta} \sum_n e^{-i\omega_n\tau} \Delta(\omega_n), \quad (1.9)$$

D'après les équations (1.8) et (1.9), le propagateur dans la représentation de Fourier est donné par :

$$\Delta(\omega_n) = \frac{1}{2} (1 \pm (-1)^n) \int_0^{+\beta} e^{i\omega_n\tau} \Delta(\tau) d\tau. \quad (1.10)$$

Les fréquences permises aux différents champs sont de la forme $\frac{2n\pi}{\beta}$ pour les bosons et $\frac{(2n+1)\pi}{\beta}$ pour les fermions.

Remarques :

- Nous nous sommes restreints à la transformée de Fourier temporelle, la généralisation aux coordonnées de l'espace est directe. Nous obtenons donc les mêmes règles de Feynman qu'à température nulle sauf que $\int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4}$ est remplacée par $T \sum_n \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3}$.

- Rappelons que les matrices γ satisfont dans le formalisme euclidien les relations d'anti-commutation suivantes :

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = -2\delta_{\mu\nu} \quad (1.11)$$

1.2.2 Propagateurs et vertex d'interaction de QED

L'électrodynamique quantique dans la jauge de Feynman est définie par le Lagrangien suivant :

$$L_{QED} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + i\bar{\Psi}\gamma^\mu(\partial_\mu + ieA_\mu)\Psi - \frac{1}{2}(\partial \cdot A)^2, \quad (1.12)$$

où $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ est le tenseur électromagnétique, Ψ le champ de Dirac de masse nulle, A le champ photonique et e la constante de couplage de QED.

Le propagateur fermionique dans le formalisme à temps imaginaire est donné par :

$$\Delta_F(\omega_n, \vec{k}) = -\left(\gamma_0\omega_n + \vec{\gamma} \cdot \vec{k}\right)\tilde{\Delta}(\omega_n, \vec{k}), \quad (1.13)$$

où $\omega_n = \frac{(2n+1)\pi}{\beta}$ est une fréquence de Matsubara fermionique et $\tilde{\Delta}(\omega_n, \vec{k})$ est donné

par :

$$\tilde{\Delta}(\omega_n, \vec{k}) = \frac{1}{\omega_n^2 + \vec{k}^2}. \quad (1.14)$$

Le propagateur photonique s'écrit dans la jauge de Feynman :

$$\Delta_{\mu\nu}(\omega_n, \vec{k}) = \Delta(\omega_n, \vec{k})\delta_{\mu\nu}, \quad (1.15)$$

où $\omega_n = \frac{2n\pi}{\beta}$ est la fréquence de Matsubara photonique et $\Delta(\omega_n, \vec{k})$ est donné par :

$$\Delta(\omega_n, \vec{k}) = \frac{1}{\omega_n^2 + \vec{k}^2} \quad (1.16)$$

En QED, il existe un seul vertex d'interaction Γ^μ (à deux fermions et un seul photon) :

$$\Gamma^\mu = \gamma^\mu. \quad (1.17)$$

Comme indiqué plus haut, les fonctions de Green se calculent ordre par ordre suivant l'expansion en boucle développée dans le cas de la température nulle. Une fois déterminées dans ce formalisme, les quantités physiques s'obtiennent par continuation analytique $ik_0 \rightarrow \omega + i0^+$.

1.2.3 Renormalisation à température finie

En général, le calcul perturbatif en théorie de champs nécessite la localisation des termes représentant des divergences ultraviolettes. Ceux-ci sont absorbés pour rendre la théorie en question renormalisable. Il est donc primordial de savoir si la présence d'un bain thermique nécessite une renormalisation appropriée.

Il est facile de voir que la température n'introduira pas de divergences ultraviolettes nouvelles. Ceci peut être vu clairement en considérant l'expression de l'une

des composantes du propagateur bosonique à température finie dans le contexte du formalisme à temps réel [14], par exemple, la composante diagonale suivante :

$$\Delta_{11}(k) = \frac{i}{k^2 - m^2 + i0^+} + 2\pi n(k) \delta(k^2 - m^2) \quad (1.18)$$

où $n(k) = \frac{1}{e^{\beta k} - 1}$ est la distribution de Bose-Einstein. Le premier terme de cette équation s'identifie avec le propagateur à température nulle. En utilisant cette expression dans le calcul des diagrammes en boucles avec $\int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4}$ la mesure interne, la fonction delta du terme dépendant de la température imposera la mass-shell et les intégrales en boucles seront finies. Par conséquent, les divergences seront issues des intégrations ne contenant pas de termes dépendant de la température. Ceci étant, la renormalisation à température nulle est suffisante.

1.3 Extraction des Hard Thermal Loops

1.3.1 Nécessité de la resomme HTL

Soit $a_i(P)$ un des termes de l'expression de la self énergie fermionique (pour plus de détails voir [14, 53]) :

$$a_i(P) = e^2 T \sum_{k_0} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} k_i \Delta(K) \tilde{\Delta}(P - K), \quad (1.19)$$

avec $K = (k_0, \vec{k})$, $k_0 = \frac{2n\pi}{\beta}$ et $P = (p_0, \vec{p})$, $p_0 = \frac{(2n+1)\pi}{\beta}$.

Après sommation sur la fréquence de Matsubara (annexe A), on obtient l'expres-

sion :

$$a_i(P) = -\frac{e^2}{2\pi^2} \int \frac{k^2 dk d\Omega}{4\pi} \frac{k_i}{2k2q} \left[\left(1 + n(k) - \tilde{n}(q)\right) \left(\frac{1}{ip_0 - k - q} - \frac{1}{ip_0 + k + q}\right) + \left(n(k) + \tilde{n}(q)\right) \left(\frac{1}{ip_0 + k - q} - \frac{1}{ip_0 - k + q}\right) \right], \quad (1.20)$$

où $q = \left| \vec{p} - \vec{k} \right|$.

Dans l'esprit de l'expansion standard en boucle, a_i doit être une correction à l'inverse du propagateur fermionique, soit e^2 -fois plus petite que l'inverse du propagateur fermionique.

Définissons deux échelles importantes : l'échelle hard de l'ordre de l'énergie thermique T et l'échelle soft de l'ordre de eT . Nous avons $eT \ll T$. Dans l'intégrale (1.20), le moment $P = (p_0, \vec{p})$ du fermion est supposé soft.

Discutons l'ordre de grandeur de l'intégrale (1.20) dans les deux cas où le moment interne est d'abord hard $k \sim T$ ensuite soft $k \sim eT$. Dans le cas où k est hard, l'intégrale peut être approximée par (annexe A) :

$$a_i(P) \simeq -\frac{e^2}{8\pi^2} \int \frac{dk d\Omega}{4\pi} k_i \left(n(k) + \tilde{n}(q) \right) \left(\frac{1}{ip_0 + p \cos \theta} - \frac{1}{ip_0 - p \cos \theta} \right), \quad (1.21)$$

avec θ l'angle entre \vec{p} et \vec{k} et le signe \simeq signifie que seule la contribution venant de k hard a été retenue. L'intégrale a_i ne peut être que de l'ordre de eT puisque les dénominateurs le sont aussi, soit du même ordre de grandeur que l'inverse du propagateur fermionique. Cette contribution ne peut donc être considérée comme une correction à Δ_F^{-1} . Celle-ci doit au contraire être ajoutée à Δ_F^{-1} pour définir un propagateur fermionique effectif. C'est ce que l'on appelle une Hard Thermal Loops.

Le programme de resomme HTL consiste à déterminer ce type de contributions pour définir les propagateurs et vertices effectifs.

Cependant, lorsque k est soft, de l'ordre de eT , il est facile de voir que l'expression (1.21) est de l'ordre de e^2T . Donc pour k soft, a_i constitue réellement une correction à l'inverse du propagateur fermionique.

En conséquence, à haute température l'expansion standard en boucles n'est pas réellement une expansion suivant les puissances de la constante de couplage lorsque les moments externes des fonctions de Green sont soft. Un programme de resomme est donc nécessaire.

1.3.2 Les différentes HTL

La HTL fermionique

Commençons par la HTL $\delta\Sigma$ associée à la self énergie fermionique $\Sigma(P)$. En utilisant les règles standards de Feynman, elle se calcule à partir du diagramme de la figure 1.1.a :

$$\delta\Sigma(P) = -e^2 \int_{hard} \frac{d^4K}{(2\pi)^4} \gamma_\mu \Delta_f(P-K) \gamma_\nu \Delta_{\mu\nu}(K), \quad (1.22)$$

avec $\int_{hard} \frac{d^4K}{(2\pi)^4} \equiv T \sum_{k_0} \frac{d^3k}{(2\pi)^3}$ et la souscription 'hard' signifie qu'il ne faut prendre que $k \sim T$. Rappelons que Δ_f et $\Delta_{\mu\nu}$ sont respectivement les propagateurs fermionique et bosonique donnés par les expressions (1.13) et (1.15).

L'approximation HTL consiste à négliger le moment externe P devant le moment

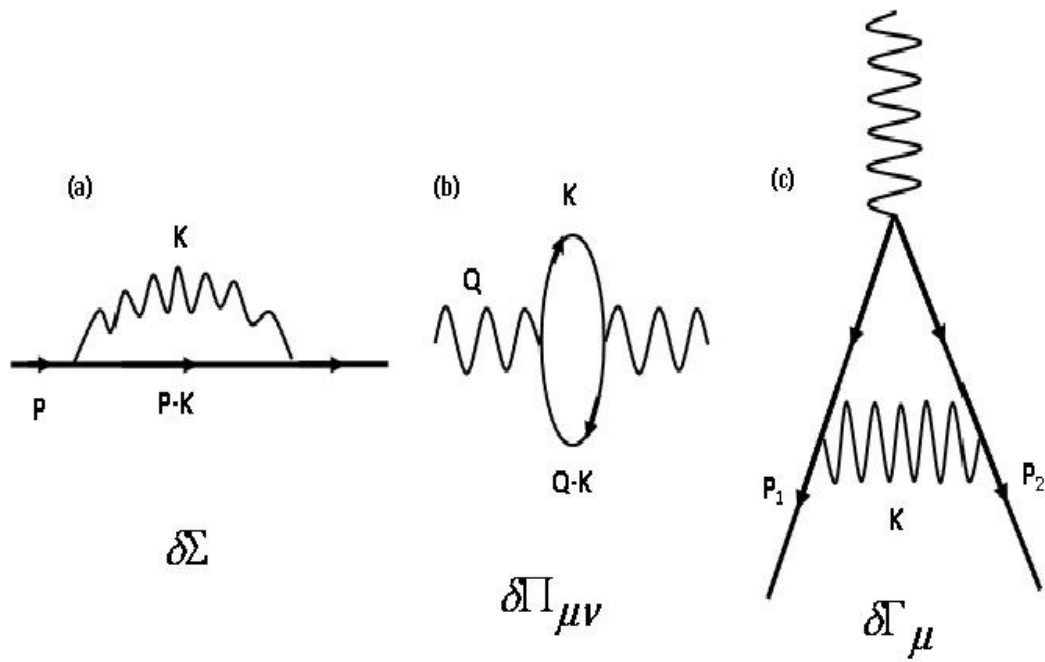


FIG. 1.1: Diagrammes à une boucle correspondant aux : (a) propagateur fermionique, (b) propagateur photonique et (c) vertex d'interaction deux fermions-un photon.

interne K . En tenant compte de la relation $\gamma_\mu \not{K} \gamma_\mu = 2\not{K}$, $\delta\Sigma$ devient :

$$\delta\Sigma(P) \simeq -2e^2 \int_{hard} \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \not{K} \Delta(K) \tilde{\Delta}(P-K). \quad (1.23)$$

Ce type d'intégrales est évalué dans l'annexe A, nous obtenons :

$$\delta\Sigma(P) = \frac{e^2 T^2}{8} \int \frac{d\Omega_S}{4\pi} \frac{\mathcal{S}}{P.S}, \quad (1.24)$$

où $S = (i, \hat{s})$ avec $\hat{s}^2 = 1$ et $P = (p_0, \vec{p})$. Une évaluation de l'intégrale sur l'angle solide Ω_s conduit au résultat suivant :

$$\delta\Sigma(P) = \frac{m_f^2}{p} Q_0 \left(\frac{ip_0}{p} \right) \gamma_0 + \vec{\gamma} \cdot \hat{p} \frac{m_f^2}{p} \left(1 - \frac{ip_0}{p} Q_0 \left(\frac{ip_0}{p} \right) \right), \quad (1.25)$$

où $m_f = \frac{1}{2\sqrt{2}} eT$ est la masse thermique fermionique et $Q_0 \left(\frac{ip_0}{p} \right)$ une fonction de Legendre de seconde espèce donnée par $Q_0 \left(\frac{ip_0}{p} \right) = \frac{1}{2} \log \frac{ip_0+p}{ip_0-p}$.

La HTL photonique

La contribution HTL $\delta\Pi_{\mu\nu}$ dans la self énergie photonique $\Pi_{\mu\nu}$ s'écrit en utilisant encore les règles de Feynman (figure 1.1.b) :

$$\delta\Pi_{\mu\nu}(Q) \simeq e^2 \int_{hard} \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \text{Tr} [\gamma_\mu \not{K} (\not{Q} - \not{K}) \gamma_\nu] \tilde{\Delta}(K) \tilde{\Delta}(Q-K). \quad (1.26)$$

En utilisant la relation bien connue :

$$\text{Tr} (\gamma_\rho \gamma_\nu \gamma_\sigma \gamma_\mu) = 4 (\delta_{\mu\sigma} \delta_{\rho\nu} - \delta_{\mu\nu} \delta_{\rho\sigma} + \delta_{\rho\mu} \delta_{\nu\sigma}). \quad (1.27)$$

Il est possible d'écrire $\delta\Pi_{\mu\nu}$ sous la forme suivante (annexe A) :

$$\delta\Pi_{\mu\nu}(Q) = -2m_p^2 \int \frac{d\Omega_S}{4\pi} \left(iq_0 \frac{S_\mu S_\nu}{Q.S} + \delta_{\mu 4} \delta_{\nu 4} \right), \quad (1.28)$$

où $m_p = \frac{eT}{\sqrt{6}}$ est la masse thermique photonique. Il est facile de voir que $\delta\Pi_{\mu\nu}$ est transverse, i.e., $Q_\mu\delta\Pi_{\mu\nu} = 0$.

Les différentes composantes s'obtiennent en fonction des fonctions scalaires $\delta\Pi_l$ et $\delta\Pi_t$:

$$\begin{aligned}\delta\Pi_{00}(Q) &= \delta\Pi_l(Q) ; \delta\Pi_{0i}(Q) = -\frac{q_0q_i}{p^2}\delta\Pi_l(Q); \\ \delta\Pi_{ij}(Q) &= (\delta_{ij} - \hat{q}_i\hat{q}_i)\delta\Pi_t(Q) + \frac{q_0^2}{q^2}\hat{q}_i\hat{q}_i\delta\Pi_l(Q),\end{aligned}\tag{1.29}$$

avec :

$$\delta\Pi_l(Q) = 2m_p^2 \left(1 - \frac{iq_0}{q} Q_0 \left(\frac{ip_0}{q} \right) \right),\tag{1.30}$$

$$\delta\Pi_t(Q) = \frac{m_p^2 q_0^2}{q^2} \left(-1 + \frac{iq_0}{q} \left(1 + \frac{q^2}{q_0^2} \right) Q_0 \left(\frac{iq_0}{q} \right) \right).\tag{1.31}$$

La HTL associée au vertex deux fermions - un photon

En utilisant les règles de Feynman la HTL $\delta\Gamma_\mu$ s'écrit (figure 1.1.c) :

$$\delta\Gamma_\mu(P_1, -P_2) = e^2 \int_{hard} \frac{d^4K}{(2\pi)^4} \gamma_\alpha (\not{K} - \not{P}_2) \gamma_\mu (\not{K} - \not{P}_1) \gamma_\alpha \tilde{\Delta}(K-P_2) \tilde{\Delta}(K-P_1) \Delta(K).\tag{1.32}$$

Expression qui peut s'écrire (annexe A) :

$$\delta\Gamma_\mu(P_1, -P_2) = -4e^2 \gamma_\alpha \int_{hard} \frac{d^4K}{(2\pi)^4} \tilde{\Delta}(K-P_2) \tilde{\Delta}(K-P_1) \Delta(K) K_\mu K_\alpha.\tag{1.33}$$

Après sommation sur la fréquence de Matsubara, la HTL contribuant aux vertex à trois points s'obtient :

$$\delta\Gamma_\mu(P_1, -P_2) = -m_f^2 \int \frac{d\Omega_S}{4\pi} \frac{S_\mu \not{S}}{P_1 \cdot S P_2 \cdot S}.\tag{1.34}$$

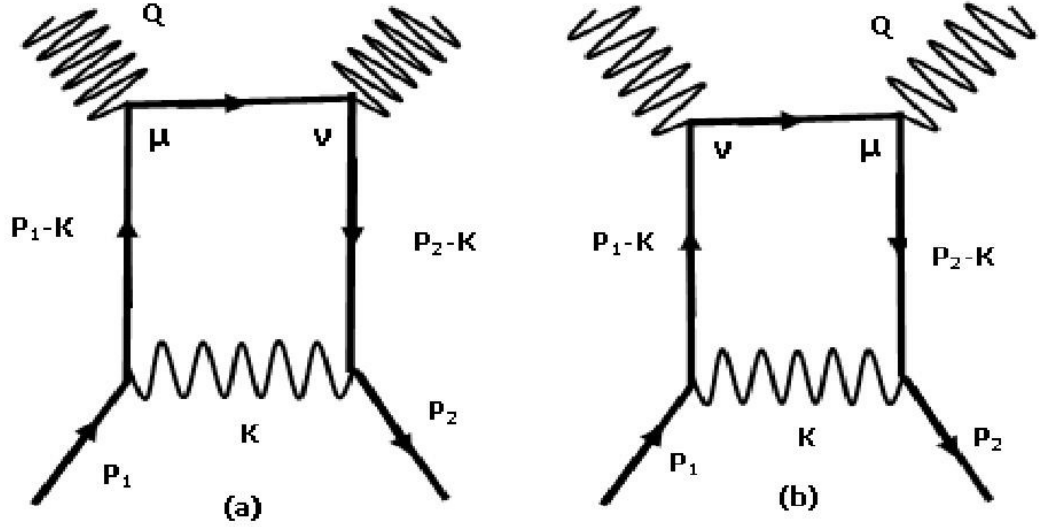


FIG. 1.2: Diagrammes à une boucle correspondant au vertex deux fermions et deux photons.

Pour P_1 et P_2 soft, la valeur de cette expression est de l'ordre de 1, c'est à dire du même ordre de grandeur que la fonction vertex nue γ_μ .

La HTL associée au vertex deux fermions - deux photons

Le vertex deux photons-deux fermions n'existe pas, cependant, nous allons voir qu'il lui correspond une HTL $\delta\Gamma_{\mu\nu}$ non-nulle (figure 1.2). Elle se détermine en utilisant les règles de Feynman avec les deux contributions suivantes :

$$\delta\Gamma_{\mu\nu}^{(1)}(P_1, -P_2, Q) \simeq 8e^2 \int_{hard} \frac{d^4K}{(2\pi)^4} K_\mu K_\nu \not{K} \Delta(K) \tilde{\Delta}(P_2 - K) \tilde{\Delta}(P_1 - K) \tilde{\Delta}(P_1 + Q - K), \quad (1.35)$$

$$\delta\Gamma_{\mu\nu}^{(2)}(P_1, -P_2, Q) \simeq 8e^2 \int_{hard} \frac{d^4K}{(2\pi)^4} K_\mu K_\nu \not{K} \Delta(K) \tilde{\Delta}(P_2 - K) \tilde{\Delta}(P_1 - K) \tilde{\Delta}(P_2 - Q - K). \quad (1.36)$$

En utilisant l'approxiamtion $\frac{1}{2}(K - P_1)^2 - \frac{1}{2}(K - P_1 - Q)^2 \simeq QK$ et l'expression (1.33), on obtient pour la première contribution :

$$Q_\mu \delta\Gamma_{\mu\nu}^{(1)}(P_1, -P_2, Q) \simeq \delta\Gamma_\nu(P_1, -P_2) - \delta\Gamma_\nu(P_1 + Q, -P_2). \quad (1.37)$$

D'une manière similaire, nous déduisons pour la deuxième contribution :

$$Q_\mu \delta\Gamma_{\mu\nu}^{(2)}(P_1, -P_2, Q) \simeq \delta\Gamma_\nu(P_1, -P_2 + Q) - \delta\Gamma_\nu(P_1, -P_2). \quad (1.38)$$

Nous obtenons ainsi une identité de Ward reliant les HTL à trois points et la HTL à quatre points :

$$Q_\mu \delta\Gamma_{\mu\nu}(P_1, -P_2, Q) \simeq \delta\Gamma_\nu(P_1, -P_2 + Q) - \delta\Gamma_\nu(P_1 + Q, -P_2), \quad (1.39)$$

où $\delta\Gamma_{\mu\nu} = \delta\Gamma_{\mu\nu}^{(1)} + \delta\Gamma_{\mu\nu}^{(2)}$.

En remplaçant $\delta\Gamma_\nu$ par son expression (1.34), et en multipliant par K_μ :

$$\delta\Gamma_{\mu\nu}(P_1, -P_2, Q) = -m_f^2 \int \frac{d\Omega_S}{4\pi} \left[\frac{1}{P_1 \cdot S} + \frac{1}{P_2 \cdot S} \right] \frac{S_\mu S_\nu \not{S}}{(P_1 + Q) \cdot S (P_2 - Q) \cdot S}. \quad (1.40)$$

La fonction à quatre photons s'exprime à l'aide des identités de Ward en termes de fonctions à trois points et l'on montre que celle-ci n'a pas de contribution HTL. Il en est de même de la fonction à quatre fermions. Somme toute, les seules HTL existantes à l'ordre d'une boucle sont celles données dans cette section par les relations (1.24), (1.28), (1.34) et (1.40).

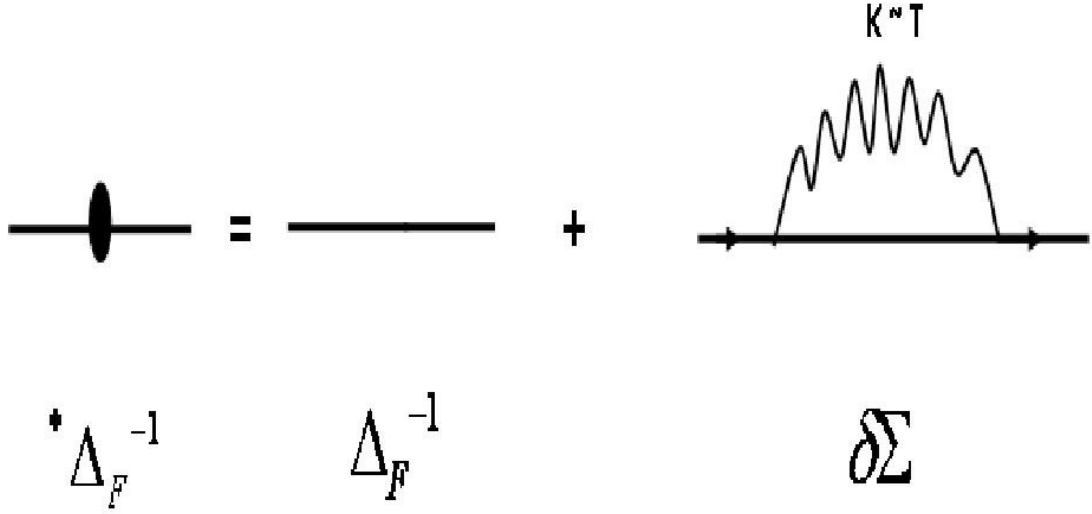


FIG. 1.3: Diagramme du propagateur fermionique effectif.

1.4 Propagateurs et vertices effectifs

Nous avons évalué dans ce qui a précédé les différentes HTL intervenant à l'ordre d'une boucle dans QED. Il reste maintenant à définir les propagateurs et vertices effectifs qui vont former la base de l'expansion effective de Braaten et Pisarski [53].

L'inverse du propagateur effectif fermionique noté $*\Delta_F^{-1}$ s'écrit (figure 1.3) :

$$*\Delta_F^{-1}(P) = \Delta_F^{-1}(P) + \delta\Sigma(P), \quad (1.41)$$

où Δ_F^{-1} est l'inverse du propagateur nu du fermion. $\delta\Sigma$ est la HTL dans la self énergie fermionique donnée par (1.25). Après inversion, on obtient le propagateur fermionique effectif :

$$*\Delta_F(P) = -\frac{1}{2}\Delta_+(P)(\gamma_0 - \vec{\gamma} \cdot \hat{p}) - \frac{1}{2}\Delta_-(P)(\gamma_0 + \vec{\gamma} \cdot \hat{p}), \quad (1.42)$$

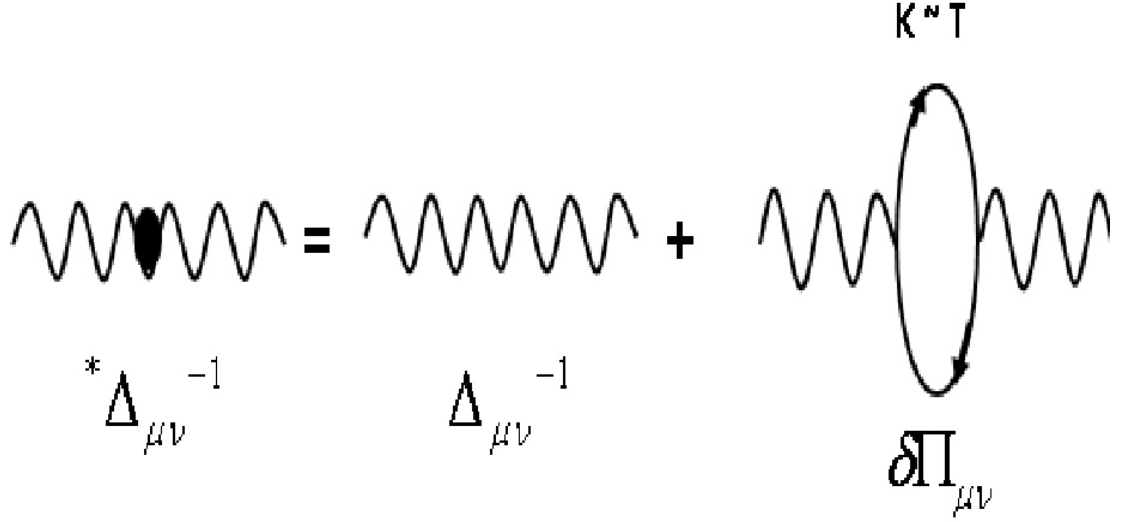


FIG. 1.4: Diagramme du propagateur photonique effectif.

où Δ_{\pm} représentent les composantes suivant les deux états d'hélicité des fermions :

$$\Delta_{\pm}(ip_0, p) = \left[ip_0 \mp p \mp \frac{m_f^2}{p} \left(1 \pm \left(1 \mp \frac{ip_0}{p} \right) Q_0 \left(\frac{ip_0}{p} \right) \right) \right]^{-1}. \quad (1.43)$$

L'inverse du propagateur photonique $*\Delta_{\mu\nu}^{-1}$ est défini par (figure 1.4) :

$$*\Delta_{\mu\nu}^{-1}(Q) = \Delta_{\mu\nu}^{-1}(Q) + \delta\Pi_{\mu\nu}(Q). \quad (1.44)$$

Ainsi dans la jauge covariante de Feynman $\lambda = 1$, le propagateur photonique effectif

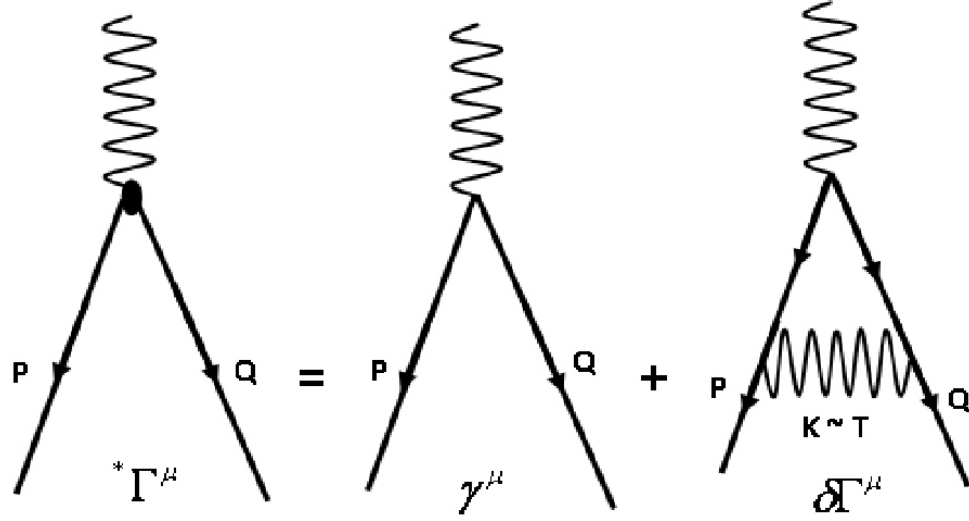


FIG. 1.5: Diagramme du vertex effectif deux fermions-un photon.

se décompose comme suit [14, 53] :

$$\begin{aligned}
 {}^* \Delta_{00}(Q) &= {}^* \Delta_l(Q) + \lambda \frac{q_0^2}{Q^4} + \frac{{}^* \Delta_l(Q)}{Q^4} (-2q^2 q_0^2 - q_0^4), \\
 {}^* \Delta_{ij}(Q) &= (\delta_{ij} - \hat{q}_i \hat{q}_j) {}^* \Delta_l(Q) + \hat{q}_i \hat{q}_j \frac{q_0^2}{Q^4} {}^* \Delta_l(Q) + \lambda \hat{q}_i \hat{q}_j \frac{q^2}{Q^4}, \\
 {}^* \Delta_{i0}(Q) &= -\lambda \frac{q_i q_0}{Q^4} + q_i \frac{q^2 q_0}{Q^4} {}^* \Delta_l(Q),
 \end{aligned} \tag{1.45}$$

avec ${}^* \Delta_l(Q) = \frac{1}{q^2 + \delta \Pi_l}$ et ${}^* \Delta_t(Q) = \frac{1}{Q^2 + \delta \Pi_t}$ où $\delta \Pi_l$ et $\delta \Pi_t$ sont données respectivement par les équations (1.30) et (1.31).

Le vertex effectif à deux fermions-un photon s'écrit (figure 1.5) :

$${}^* \Gamma_\mu(P, -Q) = \gamma_\mu + \delta \Gamma_\mu(P, -Q), \tag{1.46}$$

tel que $\delta \Gamma_\mu$ est la HTL associée.

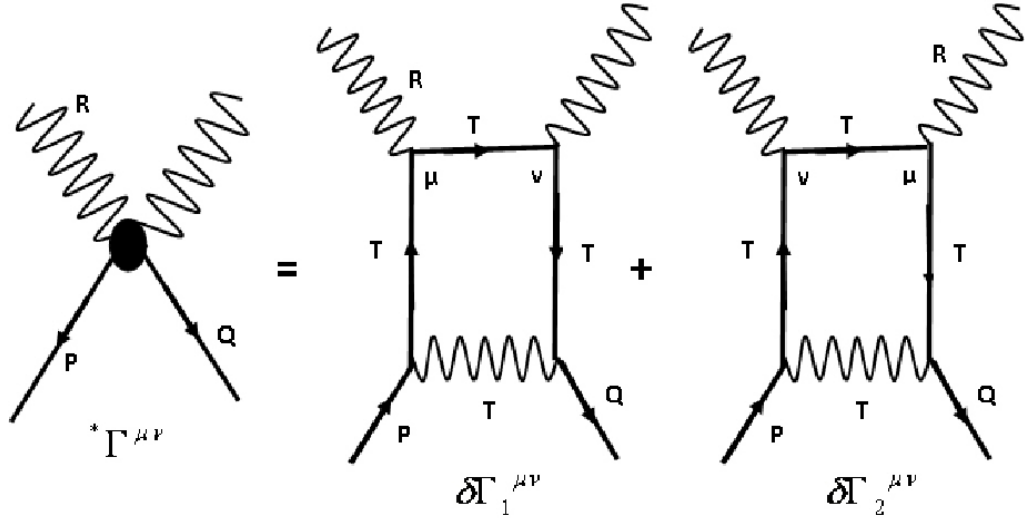


FIG. 1.6: Diagramme du vertex effectif deux fermions-deux photons.

Le vertex effectif à deux fermions-deux photons coincide avec la HTL à quatre points puisqu'en QED à température nulle ce type de vertex n'existe pas (figure 1.6) :

$${}^*\Gamma_{\mu\nu}(P, -Q, R) = \delta\Gamma_{\mu\nu}(P, -Q, R). \quad (1.47)$$

Dans ce chapitre, nous avons extrait des diagrammes à une boucle les contributions HTL à incorporer avec les quantités nues pour définir les propagateurs et vertices effectifs. Nous allons utiliser ceux-ci pour définir et calculer les taux d'atténuation des fermions dans le contexte de QED à température finie.

Chapitre 2

Calcul des taux d'atténuation des fermions

Dans ce chapitre, nous calculons les taux d'atténuation des fermions d'hélicité positive et négative dans le cadre du programme de resomme des *hard thermal loops*. Nous travaillons dans le contexte du formalisme à temps imaginaire où le moment du fermion est représenté par un quadri-vecteur $P^\mu(p_0, \vec{\mathbf{P}})$ avec $p_0 = \frac{(2n+1)\pi}{\beta}$ une fréquence de Matsubara fermionique. Les énergies réelles ω s'obtiennent par la continuation analytique $ip_0 = \omega + i0^+$.

2.1 Taux d'atténuation et self énergie effective

L'inverse du propagateur fermionique (1.42) peut être réécrit sous la forme :

$${}^* \Delta_F^{-1} = -A_0 \gamma_0 + A_s \vec{\gamma} \cdot \hat{p}, \quad (2.1)$$

avec

$$A_0 = ip_0 - \frac{m_f^2}{p} Q_0 \left(\frac{ip_0}{p} \right) \quad \text{et} \quad A_s = p + \frac{m_f^2}{p} \left(1 - \frac{ip_0}{p} Q_0 \left(\frac{ip_0}{p} \right) \right). \quad (2.2)$$

Les relations de dispersion à l'ordre le plus bas s'obtiennent à partir des pôles du propagateur ${}^* \Delta_F$.

Pour des moments p soft, nous pouvons déterminer ces relations de dispersion en une série suivant les puissances de p :

$$\frac{\omega_{\pm}}{m_f} = 1 \pm \frac{p}{3m_f} + \frac{1}{3} \frac{p^2}{m_f^2} \mp \frac{16}{135} \frac{p^3}{m_f^3} + \frac{1}{54} \frac{p^4}{m_f^4} + \dots \quad (2.3)$$

A cet ordre le plus bas, les relations de dispersion sont réelles, ce qui veut dire que les fermions ne sont pas encore atténués. Il faudrait, pour obtenir l'atténuation à son ordre le plus bas, inclure la self énergie effective à une boucle ${}^* \Sigma$ dans les relations de dispersion. L'inverse du propagateur se met sous la forme :

$$\Delta_F^{-1}(P) = {}^* \Delta_F^{-1}(P) - {}^* \Sigma(P), \quad (2.4)$$

où ${}^* \Sigma$ est un terme correctif à ${}^* \Delta_F^{-1}$, il s'écrit :

$${}^* \Sigma(P) = \gamma_0 A_0^* + \vec{\gamma} \cdot \hat{p} A_s^*, \quad (2.5)$$

L'expression de l'inverse du propagateur s'écrit alors :

$$\Delta_F^{-1}(P) = -\gamma_0 (A_0 + A_0^*) + \vec{\gamma} \cdot \hat{p} (A_s - A_s^*). \quad (2.6)$$

Les relations de dispersion s'écrivent :

$$(A_0 + A_0^*) (-i\Omega_{\pm}, \mathbf{p}) = \pm (A_s - A_s^*) (-i\Omega_{\pm}, \mathbf{p}), \quad (2.7)$$

avec Ω_{\pm} les pôles du propagateur complet Δ_F .

Les relations de dispersion correspondant aux deux états d'hélicité se mettent sous la forme suivante :

$$f_{\pm}(-i\Omega_{\pm}, \mathbf{p}) = {}^* f_{\pm}(-i\Omega_{\pm}, \mathbf{p}), \quad (2.8)$$

avec

$$f_{\pm} = A_0 \mp A_s \text{ et } {}^* f_{\pm} = -{}^* A_0 \mp {}^* A_s. \quad (2.9)$$

Les taux d'atténuation γ_{\pm} sont définis par :

$$\gamma_{\pm}(p) = -\text{Im } \Omega_{\pm}(p), \quad (2.10)$$

Puisque ${}^* f_{\pm}$ est e -plus petite que f_{\pm} , nous avons pour γ_{\pm} à l'ordre le plus bas :

$$\gamma_{\pm}(p) = \left. \frac{-\text{Im } {}^* f_{\pm}(-i\omega, p)}{\frac{\partial}{\partial \omega} f_{\pm}(-i\omega, p)} \right]_{\omega=\omega_{\pm}(p)+i0^+}. \quad (2.11)$$

En utilisant (2.3) et (2.11), nous obtenons :

$$\gamma_{\pm}(p) = \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{2}{3}p - \frac{2}{9}p^2 \pm O(p^3) \right) \left. \text{Im } {}^* f_{\pm}(-i\omega, p) \right]_{\omega=\omega_{\pm}(p)+i0^+}, \quad (2.12)$$

${}^* f_{\pm}$ sont directement liées à la self énergie fermionique.

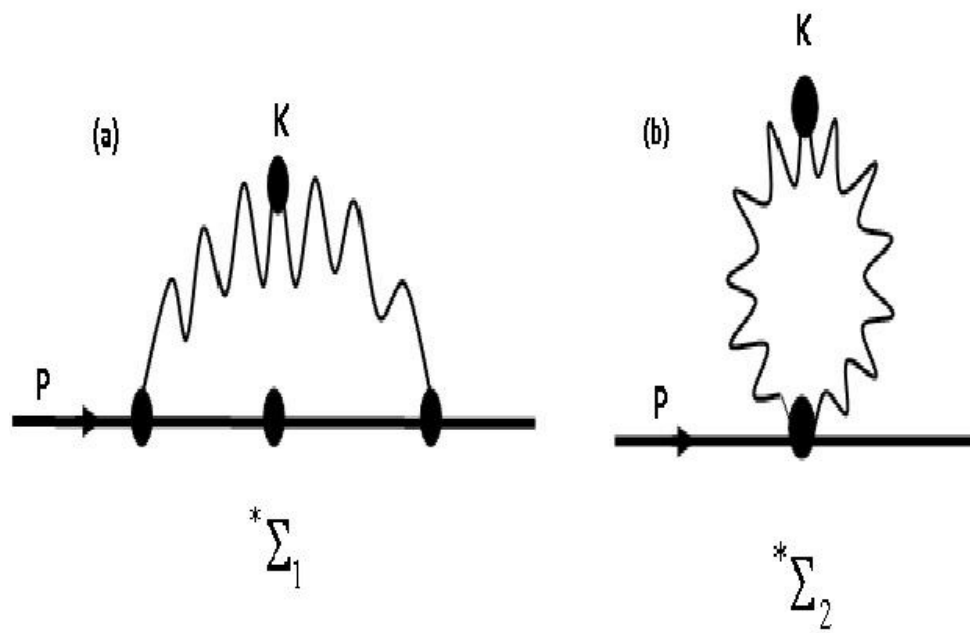


FIG. 2.1: Diagrammes à une boucle intervenants dans la self énergie fermionique effective.

2.2 Partie imaginaire de la self énergie effective

Dans le calcul de la self énergie fermionique ${}^*\Sigma$, il intervient deux diagrammes à une boucle (figure 2.1), $\text{Im}{}^*\Sigma$ se met sous la forme :

$$\text{Im}{}^*\Sigma(P) = \text{Im}{}^*\Sigma_1(P) + \text{Im}{}^*\Sigma_2(P) \quad (2.13)$$

2.2.1 Calcul de $\text{Im}{}^*\Sigma_1$

Nous présentons en premier lieu les différentes étapes du calcul de $\text{Im}{}^*\Sigma_1(P)$ et en second lieu nous discutons $\text{Im}{}^*\Sigma_2(P)$.

La contribution ${}^*\Sigma_1(P)$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \text{Im}{}^*\Sigma_1(P) &= -e^2 \text{Im} \int_{soft} \frac{d^4K}{(2\pi)^4} {}^*\Gamma^\mu(-P, Q) {}^*\Delta_F(Q) {}^*\Gamma^\nu(P, -Q) {}^*\Delta_{\mu\nu}(K) \\ &= \frac{e^2}{2} \text{Im} \int_{soft} \frac{d^4K}{(2\pi)^4} \sum_{\varepsilon=\pm 1} {}^*\Gamma^\mu(-P, Q) \Delta_\varepsilon(Q) (\gamma_0 - \varepsilon \vec{\gamma} \cdot \hat{q}) {}^*\Gamma^\nu(P, -Q) {}^*\Delta_{\mu\nu}(K), \end{aligned} \quad (2.14)$$

où $K = (k_0, \vec{k})$ désigne le moment interne de la boucle, $Q = P - K$ et où la souscription 'soft' signifie qu'il ne faut prendre que les moments soft de l'intégrale,

$$\text{avec } \int \frac{d^4K}{(2\pi)^4} \equiv T \sum_{k_0} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}.$$

Pour illustrer les étapes du calcul de ${}^*\Sigma_1$, présentons le calcul du terme le plus simple, celui qui fait intervenir ${}^*\Delta_{00}$ et Δ_- . Dorénavant, nous prendrons $m_f = 1$, ceci simplifie largement les expressions. Avec le changement de variables $P - K$ par K et avec le remplacement des vertices par leurs expressions données dans le chapitre

précédent, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\text{Im } {}^*\Sigma_{-l}(P) &= \frac{4}{T^2} \text{Im } T \sum_{k_0}^{\sim} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \Delta_{-}(K) \left[-\gamma_0 \left(\gamma_0 + \vec{\gamma} \cdot \hat{k} \right) \gamma_0 \right. \\
&\quad - \int \frac{d\Omega_S}{4\pi} \frac{1}{P.S \ K.S} \left(2 \left(\vec{\gamma} \cdot \hat{s} - \vec{\gamma} \cdot \hat{k} - \gamma_0 \right) + \gamma_0 \left(\vec{\gamma} \cdot \hat{s} \ \vec{\gamma} \cdot \hat{k} + \vec{\gamma} \cdot \hat{k} \ \vec{\gamma} \cdot \hat{s} \right) \right) \\
&\quad \left. - \int \frac{d\Omega_S}{4\pi} \frac{\mathcal{S}}{P.S \ K.S} \left(\gamma_0 + \vec{\gamma} \cdot \hat{k} \right) \int \frac{d\Omega_S}{4\pi} \frac{\mathcal{S}}{P.S \ K.S} \right] {}^*\Delta_l(Q). \quad (2.15)
\end{aligned}$$

Commençons par le terme faisant intervenir une intégrale angulaire et dénotons le par

I_1 . En choisissant \hat{k} comme axe principal pour l'intégration angulaire $\Omega_S = (\theta, \varphi)$,

nous avons :

$$I_1 = \frac{8}{T^2} \text{Im } T \sum_{k_0}^{\sim} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \Delta_{-}(K) \int \frac{d\Omega_S}{4\pi} \frac{\left(\vec{\gamma} \cdot \hat{k} - \vec{\gamma} \cdot \hat{s} - \gamma_0 (1 - \cos \theta) \right)}{P.S \ K.S} {}^*\Delta_l(Q), \quad (2.16)$$

où $\hat{k} \cdot \hat{s} = \cos \theta$, $\hat{k} \cdot \hat{p} = \cos \psi$, $\hat{p} \cdot \hat{s} = -\sin \varphi \sin \psi \sin \theta + \cos \psi \cos \theta$. Pour des moments ultra-soft, i.e. ; $p \sim e^2 T$, $p < |ip_0|$, ce qui justifie l'expansion :

$$\frac{1}{P.S} = \frac{1}{ip_0 + \vec{p} \cdot \hat{s}} = \frac{1}{ip_0} \left(1 - \frac{\vec{p} \cdot \hat{s}}{ip_0} + \frac{\vec{p} \cdot \hat{s}^2}{(ip_0)^2} + \dots \right). \quad (2.17)$$

Nous avons alors :

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{8}{T^2} \text{Im } T \sum_{k_0} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\Delta_{-}(K)}{ip_0 k} \int \frac{\sin \theta d\theta d\varphi}{4\pi} \left(\vec{\gamma} \cdot \hat{k} - \vec{\gamma} \cdot \hat{s} - \gamma_0 (1 - \cos \theta) \right) \\
&\quad \times \left(1 - g(\theta, \varphi, \psi) + g^2(\theta, \varphi, \psi) + \dots \right) \frac{{}^*\Delta_l(Q)}{\cos \theta + \frac{ik_0}{k}}, \quad (2.18)
\end{aligned}$$

où $g(\theta, \varphi, \psi) = \frac{p}{ip_0} (-\sin \varphi \sin \psi \sin \theta + \cos \psi \cos \theta)$. Les intégrales angulaires se calculent maintenant aisément :

$$\begin{aligned}
I_1 &= -\frac{8}{T^2} \text{Im } T \sum_{k_0} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{ip_0 k} \left[\gamma_0 X_0 + (-X_0 \cos \psi + X_1 \sin \psi) \gamma_3 \right. \\
&\quad \left. + (-X_0 \sin \psi - X_1 \cos \psi) \gamma'_2 + \dots \right] \Delta_{-}(K) {}^*\Delta_l(Q),
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
X_0 = & \left[\left(-1 + \left(1 + \frac{ik_0}{k} \right) Q_{0k} \right) - \frac{p \cos \psi}{ip_0} \left(1 + \frac{ik_0}{k} - \left(\frac{ik_0}{k} + \frac{k_0^2}{k^2} \right) Q_{0k} \right) \right. \\
& + \frac{p^2}{p_0^2} \left[\cos^2 \psi \left(\frac{1}{3} + \frac{ik_0}{k} - \frac{k_0^2}{k^2} + \left(\frac{k_0^2}{k^2} + \frac{ik_0^3}{k^3} \right) Q_{0k} \right) \right. \\
& \left. \left. - \frac{\sin^2 \psi}{2} \left(-\frac{2}{3} + \frac{ik_0}{k} - \frac{k_0^2}{k^2} + \left(1 + \frac{ik_0}{k} + \frac{k_0^2}{k^2} + \frac{ik_0^3}{k^3} \right) Q_{0k} \right) \right] \right] \quad (2.19)
\end{aligned}$$

$$X_1 = -\frac{p \sin \psi}{2ip_0} \left(\frac{ik_0}{k} + \left(1 + \frac{k_0^2}{k^2} \right) Q_{0k} \right) + \frac{p^2}{p_0^2} \sin \psi \cos \psi \left(\frac{1}{3} - \left(1 + \frac{k_0^2}{k^2} \right) \left(1 - \frac{ik_0}{k} Q_{0k} \right) \right), \quad (2.20)$$

où $Q_{0k} = Q_0 \left(\frac{ik_0}{k} \right)$.

L'étape suivante concerne le calcul des intégrales angulaires $\Omega_k = (\psi, \alpha)$ relatives à \hat{k} . Pour cela, choisissons \hat{p} comme axe principal. Les matrices γ'_i par rapport à \hat{p} s'obtiennent par rotation autour de \hat{p} d'angle α :

$$\begin{aligned}
\gamma'_1 &= \gamma_1 \cos \alpha - \gamma_2 \sin \alpha; \\
\gamma'_2 &= \gamma_1 \sin \alpha + \gamma_2 \cos \alpha; \\
\gamma'_3 &= \gamma_3. \quad (2.21)
\end{aligned}$$

Développons ensuite ${}^* \Delta_l(Q)$ en fonction de $q = \left| \hat{k} - \hat{p} \right|$ pour p petit, écrivons plus généralement :

$${}^* \Delta_{\mu\nu}(Q) = {}^* \Delta_{\mu\nu}(q_0, \vec{k}) + \frac{\partial}{\partial q} {}^* \Delta_{\mu\nu} \Big|_{q=k} (q-k) + \frac{\partial^2}{\partial q^2} {}^* \Delta_{\mu\nu} \Big|_{q=k} (q-k)^2 + \dots \quad (2.22)$$

Nous avons l'expression suivante :

$$q - k = -p \cos \psi + \frac{p^2}{2k} \sin^2 \psi + o(p^2). \quad (2.23)$$

Nous obtenons alors :

$${}^* \Delta_{\mu\nu}(Q) = \left(1 - p \cos \psi \frac{\partial}{\partial k} + \frac{p^2}{2} \left(\frac{\sin^2 \psi}{k} \frac{\partial}{\partial k} + \cos^2 \psi \frac{\partial^2}{\partial k^2} \right) + \dots \right) {}^* \Delta_{\mu\nu}(q_0, \vec{k}). \quad (2.24)$$

Nous pouvons maintenant intégrer sur $\Omega_k = (\alpha, \psi)$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} I_1 = & -\frac{4}{\pi^2 T^2} T \sum_{k_0}^{\sim} \int \frac{k^2 dk}{ip_0 k} \Delta_-(K) \left[\gamma_0 \left[-1 + \left(1 + \frac{ik_0}{k} \right) Q_{0k} \right. \right. \\ & + \frac{p^2}{3} \left(\frac{1}{p_0^2} \left(-1 + \left(1 + \frac{ik_0}{k} \right) Q_{0k} \right) - \frac{1}{ip_0} \left(1 + \frac{ik_0}{k} - \left(\frac{ik_0}{k} - \frac{k_0^2}{k^2} \right) Q_{0k} \right) \partial_k \right. \\ & \left. \left. - \left(-1 + \left(1 + \frac{ik_0}{k} \right) Q_{0k} \right) \left(\frac{\partial_k}{k} + \frac{\partial_k^2}{2} \right) \right] \right. \\ & \left. - \frac{p\gamma_3}{3} \left(-1 + \left(1 + \frac{ik_0}{k} \right) Q_{0k} \right) \left(\partial_k - \frac{1}{ip_0} \right) + \dots \right] {}^* \Delta_l(q_0, \vec{k}). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Le terme I_0 dans (2.15) ne faisant pas intervenir d'intégration angulaire sur Ω_s se calcule plus facilement :

$$I_0 = -\frac{2}{\pi^2 T^2} T \sum_{k_0}^{\sim} \int k^2 dk \Delta_-(K) \left(\gamma_0 \left(1 + \frac{p^2}{3} \left(\frac{\partial_k}{k} + \frac{\partial_k^2}{2} \right) \right) - \frac{p\gamma_3}{3} \partial_k + \dots \right) {}^* \Delta_l(q_0, \vec{k}). \quad (2.26)$$

Quant au troisième terme I_2 dans (2.15), celui faisant intervenir deux intégrales angulaires sur Ω_s , nous obtenons le résultat suivant :

$$\begin{aligned} I_2 = & -\frac{2}{\pi^2 T^2} T \sum_{k_0}^{\sim} \int \frac{dk}{p_0^2} \Delta_-(K) \left[-\gamma_0 a_-^2 + \frac{p\gamma_3}{3} a_-^2 \left(\partial_k - \frac{2}{ip_0} \right) \right. \\ & + \frac{p^2 \gamma_0}{3} \left(\frac{1}{2p_0^2} \left(3 - \left(2 - 6 \frac{ik_0}{k} \right) a_- + \left(5 - 2 \frac{ik_0}{k} - 3 \frac{k_0^2}{k^2} \right) a_-^2 \right) \right. \\ & \left. \left. - \frac{2a_-}{ip_0} \left(1 + \frac{ik_0 a_-}{k} \right) \partial_k - a_-^2 \left(\frac{\partial_k}{k} + \frac{\partial_k^2}{2} \right) \right] + \dots \right] {}^* \Delta_l(q_0, \vec{k}), \end{aligned} \quad (2.27)$$

avec $a_\epsilon = 1 + \epsilon \left(1 - \epsilon \frac{ik_0}{k} \right) Q_{0k}$, où $\epsilon = \pm$.

Puisque $\text{Im } {}^*\Sigma_{+l}$ est calculée d'une manière similaire que $\text{Im } {}^*\Sigma_{-l}$, nous pouvons écrire pour ces contributions :

$$\begin{aligned}
\text{Im } {}^*\Sigma_{\varepsilon l} &= -\frac{2}{\pi^2 T^2} T \sum_{k_0} \int k^2 dk \Delta_\varepsilon(K) \\
&\times \left[\gamma_0 \left(1 + \frac{2\varepsilon}{ip_0 k} a_\varepsilon - \frac{a_\varepsilon^2}{k^2 p_0^2} \right) + \frac{p\gamma_3}{3} \left(-\varepsilon \partial_k - \frac{2a_\varepsilon}{ip_0 k} \left(\partial_k + \frac{\varepsilon}{ip_0} \right) \right. \right. \\
&+ \left. \frac{\varepsilon a_\varepsilon^2}{k^2 p_0^2} \left(\partial_k + \frac{2\varepsilon}{ip_0} \right) \right) + \frac{p^2 \gamma_0}{3} \left[\frac{\partial_k}{k} + \frac{\partial_k^2}{2} + \frac{2}{ip_0 k} \left(\frac{-\varepsilon a_\varepsilon}{p_0^2} \right. \right. \\
&+ \left. \left. \varepsilon a_\varepsilon \left(\frac{\partial_k}{k} + \frac{\partial_k^2}{2} \right) \frac{1}{ip_0} \left(1 - \varepsilon \frac{ik_0}{k} a_\varepsilon \right) \partial_k \right) \right. \\
&+ \left. \frac{1}{k^2 p_0^2} \left(-\frac{2\varepsilon}{ip_0} a_\varepsilon \left(1 - \varepsilon \frac{ik_0}{k} a_\varepsilon \right) \partial_k - a_\varepsilon^2 \left(\frac{\partial_k}{k} + \frac{\partial_k^2}{2} \right) \right. \right. \\
&+ \left. \left. \frac{1}{2p_0^2} \left(3 - 2a_\varepsilon \left(1 + 3\varepsilon \frac{ik_0}{k} \right) + \left(5 + 2\varepsilon \frac{ik_0}{k} - 3 \frac{k_0^2}{k^2} \right) a_\varepsilon^2 \right) \right) \right] + \dots \Big] {}^*\Delta_l(q_0, \vec{k}). \tag{2.28}
\end{aligned}$$

L'étape suivante est d'effectuer la somme sur la fréquence de Matsubara k_0 . Mais avant cela, il est nécessaire de faire des arrangements pour ne garder que des termes faisant intervenir une seule ou le produit de deux des quantités $\Delta_\varepsilon(K)$, $Q_0\left(\frac{ik_0}{k}\right)$ et $\Delta_l(q_0, \vec{k})$. Nous utilisons pour cela, deux relations qui se déduisent de l'expression de Δ_ε :

$$a_\varepsilon \Delta_\varepsilon = -\varepsilon k (1 - (ik_0 - \varepsilon k) \Delta_\varepsilon); \tag{2.29}$$

$$a_\varepsilon^2 \Delta_\varepsilon = -\varepsilon k (a_\varepsilon + \varepsilon k (ik_0 - \varepsilon k) (1 - (ik_0 - \varepsilon k) \Delta_\varepsilon)). \tag{2.30}$$

La somme sur la fréquence de Matsubara s'effectue en remplaçant les propagateurs

effectifs et Q_{0k} par leurs décompositions spectrales suivantes [16, 54] :

$$\Delta_\varepsilon(K) = \int_0^\beta d\tau e^{ik_0\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \rho_\varepsilon(\omega, \vec{k}) (1 - \tilde{n}(\omega)) e^{-\omega\tau}, \quad (2.31)$$

$$^* \Delta_{l,t}(K) = \int_0^\beta d\tau e^{ik_0\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \rho_{l,t}(\omega, \vec{k}) (1 + n(\omega)) e^{-\omega\tau}, \quad (2.32)$$

$$Q_0\left(\frac{ik_0}{k}\right) = \int_0^\beta d\tau e^{ik_0\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \rho_0(\omega, \vec{k}) (1 - \tilde{n}(\omega)) e^{-\omega\tau}. \quad (2.33)$$

Rappelons que $\tilde{n}(\omega) = \frac{1}{e^{\beta\omega} + 1}$ et $n(\omega) = \frac{1}{e^{\beta\omega} - 1}$ sont respectivement les distributions de Fermi-Dirac et de Bose-Einstein et $\rho_\varepsilon(\omega, \vec{k})$, $\rho_{l,t}(\omega, \vec{k})$ et $\rho_0(\omega, \vec{k})$ sont les densités spectrales des différentes quantités. La somme sur k_0 s'effectue en utilisant la relation :

$$T \sum_{k_0}^{\sim} e^{ik_0\tau} = \delta(\tau). \quad (2.34)$$

Les termes faisant intervenir deux des quantités nécessitant une décomposition spectrale introduisent deux intégrations sur le temps imaginaire. Une des deux fait disparaître la fonction δ venant de (2.34). L'autre fait apparaître un dénominateur fonction d'énergie. La partie imaginaire est extraite en utilisant la relation :

$$\frac{1}{x + i0^+} = \text{Pr}\left(\frac{1}{x}\right) - i\pi\delta(x). \quad (2.35)$$

Quant aux termes ne faisant intervenir qu'une seule fonction nécessitant une décomposition spectrale, ils ne feront pas apparaître un dénominateur fonction d'énergie. Ils sont par conséquent réels et ne contribueront pas à $\text{Im}^* \Sigma_{\varepsilon l}$.

En définitif :

$$\begin{aligned}
\text{Im}^* \Sigma_{\epsilon l}(P) = & -\frac{2}{\pi T} \int dk k^2 d\omega_1 \frac{d\omega_2}{\omega_2} \delta(\omega_{\pm} - \omega_1 - \omega_2) \left[\gamma_0 \left((1 + \omega_1 - \epsilon k)^2 \rho_{\epsilon} + \rho_0 \frac{(\epsilon \omega_1 - k)}{k^2} \right) \right. \\
& + \frac{p}{3} \left(\mp \gamma_0 \left(2(\omega_1 - \epsilon k)(1 + \omega_1 - \epsilon k) \rho_{\epsilon} + \epsilon \rho_0 \frac{2(\omega_1 - \epsilon k)}{k^2} \right) \right. \\
& + \gamma_3 (-2(\omega_1 - \epsilon k)(1 + \omega_1 - \epsilon k) \rho_{\epsilon} - \epsilon(1 + \omega_1 - \epsilon k)^2 \rho_{\epsilon} \partial_k \\
& - \rho_0 \frac{(\omega_1 - \epsilon k)}{k^2} (2\epsilon + \partial_k) \left. \left. \right) \right] + \frac{p^2 \gamma_0}{3} \left[\gamma_0 \left(\rho_{\epsilon} \left(\frac{2}{2k^2} + \frac{2}{3}(\omega_1 - \epsilon k) \right) \right. \right. \\
& + \left(3 + 2\epsilon \frac{\omega_1}{k} + 3 \frac{\omega_1^2}{k^2} \right) \frac{(\omega_1 - \epsilon k)^2}{2} - \epsilon \frac{(\omega_1 - \epsilon k)}{k} \left(1 + 3\epsilon \frac{\omega_1}{k} \right) \left. \right) \\
& + \left(\frac{3}{k} + 4 \frac{\omega_1 - \epsilon k}{k} + \frac{k^2 - \omega_1^2}{k} - 2 \frac{\omega_1 (\omega_1 - \epsilon k)^2}{k} \right) \rho_{\epsilon} \partial_k \tag{2.36} \\
& + \frac{1}{2} (1 + \omega_1 - \epsilon k)^2 \rho_{\epsilon} \partial_k^2 + \epsilon \frac{(\omega_1 - \epsilon k)}{2k^2} \left(3 + 2\epsilon \frac{\omega_1}{k} + 3 \frac{\omega_1^2}{k^2} \right) \rho_0 \\
& - \epsilon \frac{\omega_1 - \epsilon k}{k^3} (2\omega_1 - 1) \rho_0 \partial_k + \epsilon \frac{(\omega_1 - \epsilon k)}{k^2} \rho_0 \partial_k^2 \left. \right) \\
& \mp \gamma_3 \left(-\frac{4}{3} \rho_{\epsilon} (\omega_1 - \epsilon k) \left(1 + 3 \frac{\omega_1 - \epsilon k}{2} \right) - 2 \frac{(\omega_1 - \epsilon k)}{3k^2} \rho_0 \partial_k \right. \\
& \left. - 2\epsilon \frac{(\omega_1 - \epsilon k)}{3} (1 + \omega_1 - \epsilon k) \rho_{\epsilon} \partial_k - 2\epsilon \frac{(\omega_1 - \epsilon k)}{k^2} \rho_0 \right) \left. \right] + \dots \rho_l,
\end{aligned}$$

avec $\rho_{\epsilon} = \rho_{\epsilon}(\omega_1, \vec{k})$, $\rho_0 = \rho_0(\omega_1, \vec{k})$, et $\rho_l = \rho_l(\omega_2, \vec{k})$. A noter que nous avons aussi utilisé l'approximation $\tilde{n}(\omega) \sim \frac{1}{2}$, $n(\omega) \sim \frac{T}{\omega}$ car seules les valeurs soft de ω_1 et ω_2 contribuent à l'intégrale.

En utilisant les identités de Ward [53], on montre que les termes faisant intervenir $^* \Delta_{0i}$ et $^* \Delta_{i0}$ ne contribuent pas aux taux d'atténuation. Les termes qui restent à calculer sont ceux faisant intervenir $^* \Delta_{ij}$. Ils se calculent sans difficulté supplémentaire.

2.2.2 Calcul de $\text{Im } {}^*\Sigma_2$

La deuxième contribution dans la self énergie effective ${}^*\Sigma_2(P)$ a pour expression :

$$\begin{aligned} \text{Im } {}^*\Sigma_2(P) &= -\frac{e^2}{2} \text{Im} \int_{soft} \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} {}^*\Gamma^{\mu\nu}(P, -P, -K) {}^*\Delta_{\mu\nu}(K) \\ &= \frac{8m_f^4}{T^2} \text{Im} \int_{soft} \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{d\Omega_s}{4\pi} \mathcal{P} \frac{(\widehat{s}_i \widehat{s}_j {}^*\Delta_{ij} - 2i\widehat{s}_i {}^*\Delta_{0i} - {}^*\Delta_{00})}{P.S \ K.S \ (P-K).S}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Pour des moments p ultra-soft de l'ordre de $e^2 T$, on utilise le développement :

$$\frac{1}{P.S - K.S} = \frac{1}{ip_0 - ik_0 - \vec{k} \cdot \widehat{s}} \left(1 - \frac{\vec{p} \cdot \widehat{s}}{ip_0 - ik_0 - \vec{k} \cdot \widehat{s}} + \frac{\vec{p} \cdot \widehat{s}^2}{(ip_0 - ik_0 - \vec{k} \cdot \widehat{s})^2} + \dots \right). \quad (2.38)$$

Les intégrales angulaires se calculent d'une manière similaire que précédemment et la somme sur k_0 se fait en utilisant les représentations spectrales de $\frac{1}{K^2}$ et $\frac{1}{K^4}$ en plus de celles de $\Delta_\varepsilon(K)$, $Q_0\left(\frac{ik_0}{k}\right)$, et $\Delta_{l,t}\left(q_0, \vec{k}\right)$. Nous avons :

$$\frac{1}{K^2} = \int_0^\beta d\tau e^{ik_0\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{-\omega\tau} \varepsilon(\omega) \left(1 - \tilde{n}(\omega)\right) \delta(\omega^2 - k^2); \quad (2.39)$$

$$\frac{1}{K^4} = \int_0^\beta d\tau e^{ik_0\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{-\omega\tau} \varepsilon(\omega) \left(1 - \tilde{n}(\omega)\right) \delta^{(1)}(\omega^2 - k^2), \quad (2.40)$$

où $\delta^{(1)}(\omega^2 - k^2) = \frac{\partial}{\partial \omega^2} \delta(\omega^2 - k^2)$ et $\varepsilon(\omega)$ est la fonction signe. Le résultat devient :

$$\begin{aligned}
\text{Im } {}^* \Sigma_2(P) &= -\frac{4}{\pi T} \int_0^\infty dk \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega_2}{\omega_2} \delta(\omega_\pm - \omega_1 - \omega_2) [\rho_l [k\rho_0\gamma_0 \\
&+ \frac{p}{3} (\gamma_3 (-2k\rho_0 + k^2\varepsilon(\omega_1) \delta(\omega_1^2 - k^2)) \mp \gamma_0 (2k\rho_0)) \\
&+ \frac{p^2}{3} (\gamma_0 (2k\rho_0 - 2k^2\varepsilon(\omega_1) \delta(\omega_1^2 - k^2) + k^2\omega_1\varepsilon(\omega_1) \delta^{(1)}(\omega^2 - k^2)) \\
&\mp \gamma_3 (\frac{2k^2}{3}\varepsilon(\omega_1) \delta(\omega_1^2 - k^2) - 2k\rho_0))] + \rho_t \left[\gamma_0 \rho_0 \frac{\omega_1^2 - k^2}{k} \right. \\
&+ \frac{p}{3} \left(\gamma_3 \left(2\rho_0 \frac{k^2 - \omega_1^2}{k} + \rho_0 \frac{2\omega_1}{k} \right) \mp 2\gamma_0 \rho_0 \frac{\omega_1^2 - k^2}{k} \right) \\
&+ \frac{p^2}{3} \left(\gamma_0 \left(2\frac{\omega_1^2 - k^2}{k} \rho_0 + \omega_1\varepsilon(\omega_1) \delta(\omega_1^2 - k^2) + \rho_0 \left(\frac{1}{k} - \frac{4\omega_1}{k} \right) \right) \right. \\
&\left. \left. \mp \gamma_3 \left(\frac{2(k^2 - \omega_1^2)}{k} \rho_0 + \frac{4\omega_1}{3k} \rho_0 \right) \right) \right] \Big]. \tag{2.41}
\end{aligned}$$

Il est important de souligner que la partie imaginaire de la self énergie $\text{Im } {}^* \Sigma$ ne dépend pas des termes non-physiques. Ces derniers englobent les termes de jauge (termes en λ) et les termes longitudinaux apparaissant dans les composantes transverses du propagateur photonique ¹.

2.3 Calcul numérique des taux d'atténuation

Les taux d'atténuation des fermions d'hélicités positive et négative s'écrivent :

$$\gamma_\pm(p) = -\frac{e^2 T}{8\pi} \left(a_0 \pm a_1 \frac{p}{3} + a_2 \frac{p^2}{9} + O(p^3) \right), \tag{2.42}$$

¹La partie transverse ${}^* \Delta_t$ du propagateur photonique contribue de la même manière dans la jauge de Coulomb que dans les jauges covariantes (c'est le cas de la jauge de Feynman). Contrairement au mode longitudinal ${}^* \Delta_l$ qui, dans les jauges covariantes, n'apparaît pas seulement dans ${}^* \Delta_{00}$ comme c'est le cas de la jauge de Coulomb, mais aussi dans les autres composantes du propagateur photonique. Hormis, le ${}^* \Delta_l$ dans (1.45), les autres termes longitudinaux ne contribuent pas aux taux d'atténuation.

où a_0 , a_1 et a_2 sont des intégrales multiples, elles se calculent numériquement.

$$\begin{aligned}
a_0 &= \int_{\eta}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega'}{\omega'} f_0 \delta(1 - \omega - \omega'), \\
a_1 &= \int_{\eta}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega'}{\omega'} [f_1 - f_0 \partial_{\omega}] \delta(1 - \omega - \omega'), \\
a_2 &= \int_{\eta}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega'}{\omega'} [f_2 - f_1 \partial_{\omega} - f_0 (3\partial_{\omega} - \partial_{\omega}^2)] \delta(1 - \omega - \omega'),
\end{aligned} \tag{2.43}$$

avec η est un cutoff infrarouge de l'ordre de $e^2 T$.

f_0 , f_1 et f_2 sont données par :

$$f_0 = \sum_{\varepsilon=\pm} \left[-k^2 (1 - \varepsilon k + \omega)^2 \rho_{\varepsilon} \rho'_t + \frac{1}{2} (1 + 2\varepsilon k + k^2 - \omega^2)^2 \rho_{\varepsilon} \rho'_t \right] + \frac{1}{k} (k^2 - \omega^2) \rho_0 \rho'_t, \tag{2.44}$$

$$\begin{aligned}
f_1 &= \sum_{\varepsilon=\pm} \left[2k^2 (-1 + k^2 - 2\varepsilon k \omega + \omega^2) \rho_{\varepsilon} \rho'_t + (-2\varepsilon/k - 3 + 2\varepsilon k \right. \\
&\quad \left. + 4k^2 - k^4 - (2 + 4\varepsilon k + 2k^2) \omega + (4\varepsilon/k + 4 + 2\varepsilon k + 2k^2) \omega^2 \right. \\
&\quad \left. + 2\omega^3 - (2\varepsilon/k + 1) \omega^4 \right) \rho_{\varepsilon} \rho'_t + \varepsilon k^2 (1 - \varepsilon k + \omega)^2 \rho_{\varepsilon} \partial_k \rho'_t \\
&\quad \left. + \left(\varepsilon/2 + 2k + 3\varepsilon k^2 + 2k^3 + \frac{\varepsilon}{2} k^4 - (\varepsilon + 2k + \varepsilon k^2) \omega^2 + \frac{\varepsilon}{2} \omega^4 \right) \rho_{\varepsilon} \partial_k \rho'_t \right] \\
&\quad - \frac{2}{k} (k^2 - \omega^2 + 2\omega^3/k^2) \rho_0 \rho'_t - 2k^2 \rho_1 \rho'_t + \frac{\omega}{k^2} (\omega^2 - k^2) \rho_0 \partial_k \rho'_t + 2\omega \rho_0 \partial_k \rho'_t,
\end{aligned} \tag{2.45}$$

$$\begin{aligned}
f_2 = & \sum_{\varepsilon=\pm} \left[\left(-\frac{9}{2} - k^2 - 6\varepsilon k^3 - \frac{1}{2}k^4 - (6\varepsilon k - 6k^2 + 2\varepsilon k^3) \omega \right. \right. \\
& + (9 + k^2) \omega^2 + 6\varepsilon k \omega^3 - \frac{9}{2} \omega^4 \Big) \rho_\varepsilon \rho'_l + \left(\frac{9}{2k^2} - \frac{14\varepsilon}{k} - \frac{8}{3} + 4\varepsilon k - \frac{19}{2}k^2 - 6\varepsilon k^3 + k^4 \right. \\
& + \left. \left(-\frac{3}{k^2} + \frac{25\varepsilon}{k} - 10 + 6\varepsilon k + 9k^2 - 3\varepsilon k^3 \right) \omega + \left(-\frac{6}{k^2} + \frac{2\varepsilon}{k} + 23 - 6\varepsilon k + k^2 \right) \omega^2 \right. \\
& + \left(\frac{6}{k^2} - \frac{22\varepsilon}{k} - 6 + 6\varepsilon k \right) \omega^3 + \left(-\frac{3}{2k^2} + \frac{12\varepsilon}{k} - 5 \right) \omega^4 - \left(\frac{3}{k^2} + \frac{3\varepsilon}{k} \right) \omega^5 \\
& + \left. \frac{3}{k^2} \omega^6 \right) \rho_\varepsilon \rho'_t - k (9 - 14\varepsilon k + 5k^2 + (12 - 2\varepsilon k - 6k^2) \omega \\
& - (3 - 12\varepsilon k) \omega^2 - 6\omega^3) \rho_\varepsilon \partial_k \rho'_l + \left(\frac{3}{2k} + 4\varepsilon + 7k + 8\varepsilon k^2 + \frac{7}{2}k^3 \right. \\
& - \left(\frac{3}{k} + 6\varepsilon + 6k + 6\varepsilon k^2 + 3k^3 \right) \omega - \left(\frac{3}{k} + 4\varepsilon + 5k \right) \omega^2 \\
& + \left(\frac{6}{k} + 6\varepsilon + 6k \right) \omega^3 + \frac{3}{2k} \omega^4 - \frac{3}{k} \omega^5 \Big) \rho_\varepsilon \partial_k \rho'_t - \frac{3}{2} k^2 (1 - \varepsilon k + \omega)^2 \rho_\varepsilon \partial_k^2 \rho'_l \\
& + \left. \left(\frac{3}{4} + 3\varepsilon k + \frac{9}{2}k^2 + 3\varepsilon k^3 + \frac{3}{4}k^4 - \frac{3}{2} (1 + 2\varepsilon k + k^2) \omega^2 + \frac{3}{4} \omega^4 \right) \rho_\varepsilon \partial_k^2 \rho'_l \right] \\
& - \frac{3}{k} (k^2 - \omega^2) \rho_0 \rho'_l + \left(\frac{3}{k} + 2k + \frac{6}{k} \omega - \left(\frac{15}{k^3} + \frac{2}{k} \right) \omega^2 + \frac{18}{k^3} \omega^3 \right) \rho_0 \rho'_t + (6 - 12\omega) \rho_0 \partial_k \rho'_l \\
& + \left(-3 + 6\varepsilon k + \frac{3}{k^2} \omega^2 - \frac{6}{k} \omega^3 \right) \rho_0 \partial_k \rho'_t + 3k \rho_0 \partial_k^2 \rho'_l - \frac{3}{2k} (k^2 - \omega^2) \rho_0 \partial_k^2 \rho'_l \\
& + 12k^2 \rho_1 \rho'_l - 6\omega \rho_1 \rho'_t - 6k^2 \omega \rho_2 \rho'_l.
\end{aligned} \tag{2.46}$$

Les fonctions spectrales ρ_0 , ρ_1 et ρ_2 sont données par :

$$\begin{aligned}
\rho_0(k, \omega) &= -\frac{1}{2} \Theta(k^2 - \omega^2); \\
\rho_1(k, \omega) &= \varepsilon(\omega) \delta(k^2 - \omega^2); \\
\rho_2(k, \omega) &= \varepsilon(\omega) \frac{\partial \delta(k^2 - \omega^2)}{\partial \omega^2}.
\end{aligned} \tag{2.47}$$

où Θ est la fonction de Heaviside et $\varepsilon(\omega)$ la fonction signe.

Pour évaluer numériquement les coefficients a_0 , a_1 et a_2 de (2.42), nous utilisons

les expressions des densités spectrales [14, 55]. Pour les fermions :

$$\rho_\varepsilon(k, \omega) = \xi_\varepsilon(k) \delta(\omega - \omega_\varepsilon(k)) + \xi_{-\varepsilon}(k) \delta(\omega + \omega_{-\varepsilon}(k)) + \beta_\varepsilon(k, \omega) \Theta(k - |\omega|), \quad (2.48)$$

$$\text{où } \xi_\varepsilon(k, \omega) = -\frac{1}{2}(\omega_\varepsilon^2 - k^2) \text{ tel que } \varepsilon = \pm 1,$$

$$\text{et } \beta_\varepsilon(k, \omega) = \frac{-(k + \varepsilon\omega)}{2k^2 \left[\left(\omega - \varepsilon k - \frac{\varepsilon}{k} \left(1 + \frac{\varepsilon(k - \varepsilon\omega)}{2k} \ln \frac{k+\omega}{k-\omega} \right) \right)^2 + \frac{\pi^2}{4k^4} (k - \varepsilon\omega)^2 \right]}.$$

Ainsi pour les photons :

$$\rho_{l,t}(k, \omega) = \xi_{l,t}(k) [\delta(\omega - \omega_{l,t}(k)) - \delta(\omega + \omega_{l,t}(k))] + \beta_{l,t}(k, \omega) \Theta(k - |\omega|), \quad (2.49)$$

tel que $\omega_{l,t}(k)$ le pôle du propagateur photonique $\Delta_{l,t}$ à l'ordre le plus bas et les

fonctions ξ_l ainsi que $\beta_{l,t}$ sont données par [56] :

$$\begin{aligned} \xi_l(k) &= -\frac{\omega_l(k) (\omega_l^2(k) - k^2)}{k^2 (4 - \omega_l^2(k) + k^2)} \Big|_{\omega=\omega_l(k)}, & \xi_t(k) &= \frac{\omega_t(k) (\omega_t^2(k) - k^2)}{4\omega_t^2(k) - (\omega_t^2(k) - k^2)^2} \Big|_{\omega=\omega_l(k)}, \\ \beta_t(k) &= -\frac{\omega (\omega^2 - k^2)}{k^3 \left[\left(k^2 - \omega^2 + \frac{2\omega^2}{k^2} \left(1 + \frac{(k^2 - \omega^2)}{2k\omega} \ln \frac{k+\omega}{k-\omega} \right) \right)^2 + \frac{\pi^2 \omega^2}{k^6} (k^2 - \omega^2)^2 \right]}, & & (2.50) \\ \beta_l(k) &= \frac{2\omega}{k \left[\left(4 + k^2 - \frac{2\omega}{k} \ln \frac{k+\omega}{k-\omega} \right)^2 + \frac{4\pi^2 \omega^2}{k^2} \right]}. \end{aligned}$$

Il est important de remarquer que chacune des contributions dans les coefficients

a_0 , a_1 et a_2 de (2.43) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$I_{rs} = \int_{\eta}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' f(k, \omega, \omega') \rho(k, \omega) \partial_k^r \rho_{l,t}(k, \omega') \partial_\omega^s \delta(1 - \omega - \omega'), \quad (2.51)$$

$\rho(k, \omega)$ peut désigner soit une densité spectrale fermionique (2.48) soit une des dis-

tributions données par (2.47). Les indices r et s sont respectivement les $r^{\text{ème}}$ et

$s^{\text{ème}}$ dérivées par rapport à k et ω respectivement, tels que $r + s \leq 2$.

Dans un souci de simplification, nous nous contentons de calculer un terme apparaissant dans l'expression (2.46). Les autres termes ne présentent pas de difficulté supplémentaire. Les mêmes divergences infrarouges surgissant dans le résultat final apparaissent dans cet exemple.

Prenons comme exemple la contribution en $\rho_+ \partial_k \rho$ dans le coefficient a_2 avec la fonction multiplicative $f(k, \omega, \omega') = \frac{k}{\omega'} [(14k - 5k^2 - 9) + (2k + 6k^2 - 12)\omega - (12k - 3)\omega^2 + 6\omega^3]$.

On dénote cette contribution I_{exemple} :

$$I_{\text{exemple}} = \int_{\eta}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' f(k, \omega, \omega') \rho_+(k, \omega) \partial_k \rho_l(k, \omega') \delta(1 - \omega - \omega'). \quad (2.52)$$

Des expressions (2.48) et (2.49) des densités spectrales fermionique et bosonique, on a à considérer quatre termes non-nuls.

La première contribution non-nulle à considérer est :

$$I_1 = \int_{\eta}^{\infty} dk \xi_+(k) f(k, \omega_+, 1 - \omega_+) \partial_k \beta_l(k, 1 - \omega)|_{\omega=\omega_+}. \quad (2.53)$$

Pour déterminer I_1 , on développe la fonction $f(k, \omega_+, 1 - \omega_+) \partial_k \beta_l(k, 1 - \omega)|_{\omega=\omega_+}$ autour de k petit.

$$f(k, \omega_+, 1 - \omega_+) \partial_k \beta_l(k, 1 - \omega)|_{\omega=\omega_+} = \frac{0.62738}{k} - 0.25778 - 0.035648 k + O(k^2). \quad (2.54)$$

Pour intégrer l'expression (2.54), le domaine d'intégration peut être divisé en deux sous-domaines, de η à une valeur finie $k_+(l)$ et de cette dernière à l'infini. I_1 peut

s'écrire :

$$\begin{aligned}
I_1 &= -0.62738(\ln \eta + \ln k_+(l)) \\
&+ \int_0^{k_+(l)} dk \left(\xi_+(k) f(k, \omega_+, 1 - \omega_+) \partial_k \beta_l(k, 1 - \omega) \Big|_{\omega=\omega_+} - 0.62738/k \right) \\
&+ \int_l^1 dx k'_+(x) \xi_+(k) f(k, \omega_+, 1 - \omega_+) \partial_k \beta_l(k, 1 - \omega) \Big|_{\omega=\omega_+} \Big|_{k=k_l(x)}, \quad (2.55)
\end{aligned}$$

où $x = \frac{k}{\omega_+(k)}$ tend vers 0 quand $k \rightarrow 0$ et tend vers 1 quand $k \rightarrow \infty$.

Il apparait dans l'intégrale I_1 une divergence logarithmique, puisque $\ln \eta \rightarrow -\infty$ quand $\eta \rightarrow 0$. Le deuxième terme est fini puisque $k_+(l)$ l'est aussi. Ces deux termes sont évalués de la manière suivante :

$$0.62738 \int_{\eta}^{k_+(l)} \frac{dk}{k} = 0.62738 \left(\int_{\eta}^1 \frac{dk}{k} + \int_1^{k_+(l)} \frac{dk}{k} \right) = 0.62738 (-\ln \eta + \ln k_+(l)). \quad (2.56)$$

Dans le troisième terme, nous avons soustrait le terme divergent de $\xi_+ f \partial_k \beta_l$, et on peut même prendre $\eta = 0$. La valeur de l doit être prise assez petite pour que le calcul numérique de $\int_0^{k_+(l)} dk (\xi_+ f \partial_k \beta_l - 0.62738/k)$ soit faisable. En effet, les expressions $\xi_+(k) f(k, \omega_+, 1 - \omega_+) \partial_k \beta_l(k, 1 - \omega) \Big|_{\omega=\omega_+}$ et $0.62738/k$ sont analytiquement finies et chacune d'elles présente une divergence infrarouge. Cependant, pour des faibles valeurs de l , on peut développer $\xi_+(k) f(k, \omega_+, 1 - \omega_+) \partial_k \beta_l(k, 1 - \omega) \Big|_{\omega=\omega_+} - 0.62738/k$ en puissances de k . L'expansion a été faite jusqu'à $O(k^{11})$ et on atteint la convergence même avec $l = 0.6$.

Le dernier terme de (2.55) ne présente pas de divergence, il est donné en fonction de l . On arrive au résultat :

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{\eta}^{\infty} dk \xi_+(k) f(k, \omega_+, 1 - \omega_+) \partial_k \beta_l(k, 1 - \omega) \Big|_{\omega=\omega_+} \\
&= -0.62738 \ln \eta - 0.14147.
\end{aligned} \tag{2.57}$$

Le deuxième terme non nul à évaluer est :

$$I_2 = \int_{k_l}^{\infty} dk \partial_k \xi_+ f(k, 1 - \omega_l, \omega_l) \beta_+(k, 1 - \omega_l) \Big|_{\omega=\omega_+}, \tag{2.58}$$

avec k_l la solution de la condition $\omega_l(k) = 1 + k$. Le calcul numérique de cette intégrale ne présente aucune difficulté, $I_2 = 0.72736$.

Le terme faisant intervenir la dérivée de la fonction δ contient deux contributions,

I_3 et I_4 :

$$I_3 = -\frac{\xi_l \omega'_l}{1 - \omega'_l} f(k, 1 - \omega, \omega) \beta_+(k, 1 - \omega) \Big|_{k=k_l} \tag{2.59}$$

$$I_4 = \int_{k_l}^{\infty} dk \xi_l \omega'_l \partial_{\omega} [f(k, 1 - \omega, \omega) \beta_+(k, 1 - \omega)] \Big|_{\omega=\omega_l}. \tag{2.60}$$

I_3 est nulle puisque $\beta_+(k, -k) = 0$ pour toute valeur de k .

La contribution I_4 doit être calculée délicatement car $\partial_{\omega} \beta_+(k, 1 - \omega) \Big|_{\omega=\omega_l}$ diverge quand $k \rightarrow k_l$.

En premier lieu, on divise l'intervalle d'intégration en deux, de k_l à $k_{l'}$ et de $k_{l'}$ à l'infini ($k_{l'}$ proche k_l pour que l'intégrale $\int_{k_l}^{k_{l'}}$ soit numériquement convergente).

Pour le calcul de la première intégrale, on effectue le changement de variable

$k = k_l + y$ et on définit la fonction :

$$\frac{G(y, Z)}{y} = \int_{k_l}^{\infty} dk \xi_l \omega'_l \partial_{\omega} [f(k, 1 - \omega, \omega) \beta_+(k, 1 - \omega)] \Big|_{\omega=\omega_l} \Big|_{k=k_l+y}, \tag{2.61}$$

avec $Z = \frac{1}{\ln y}$. $G(y, Z)$ peut être développée en puissance de y , $G(y, Z) = G_0(Z) +$

$G_1(Z)y + O(y^2)$:

$$I_4 = \int_{k_l}^{\infty} dk \xi_l \omega_l' \partial_{\omega} [f(k, 1 - \omega, \omega) \beta_+(k, 1 - \omega)] \Big|_{\omega=\omega_l} = \int_0^{k_l' - k_l} \frac{dy}{y} [G(y, Z) - G_0(Z)] \Big|_{Z=\frac{1}{\ln y}} \\ + \int_0^{k_l' - k_l} \frac{dy}{y} G_0(Z) \Big|_{Z=\frac{1}{\ln y}} + \int_{k_l'}^{\infty} dk \xi_l \omega_l' \partial_{\omega} [f(k, 1 - \omega, \omega) \beta_+(k, 1 - \omega)] \Big|_{\omega=\omega_l}. \quad (2.62)$$

Le calcul de la dernière intégrale se simplifie avec le changement de variable $x = \frac{k}{\omega_l}$.

On obtient en définitif $I_4 = -0.086078$.

La dernière contribution dans I_{exemple} est la double intégrale

$$I_5 = \int_{1/2}^{\infty} dk \int_{1-k}^k d\omega A(k, \omega), \quad (2.63)$$

tel que $A(k, \omega) = f(k, \omega, 1 - \omega) \beta_+(k, \omega) \partial_k \beta_l(k, 1 - \omega)$.

Pour simplifier le calcul de cette intégrale, on effectue le changement de variable,

$\omega = k - z$ et le changement de fonction, $\frac{H(k, z, Z)}{z} = A(k, k - z)$ avec $Z = \frac{1}{\ln z}$. En

faisant les développements $H(k, z, Z) = H_0(k, Z) + H_1(k, Z)z + O(z^2)$ et $H_0(k, Z) =$

$K(k)Z^3 + O(Z^4)$, I_5 peut être réécrit sous la forme :

$$I_5 = \int_{1/2}^{\infty} dk \int_{1-k}^k d\omega A(k, \omega) = \int_{1/2^+}^{\infty} dk \int_{0^+}^{2k-1} \frac{dz}{z} [H(k, z, \ln^{-1} z) - H_0(k, \ln^{-1} z)] \\ + \int_{1/2^+}^{\infty} dk \int_{\frac{1}{\ln(2k-1)}}^{0^-} \frac{dZ}{Z^2} H_0(k, Z). \quad (2.64)$$

La première intégrale est finie, puisque nous avons soustrait le terme divergent

(en $\frac{1}{z}$), elle vaut 0.13147. La deuxième se calcule en faisant le changement $z \rightarrow Z$.

Puisque $\frac{H_0}{Z^2}$ est de l'ordre de Z , l'intégrale est finie et est égale à 0.11325.

En sommant les quatre contributions, on arrive au résultat suivant :

$$I_{\text{exemple}} = -0.62738 \ln \eta + 0.51803. \quad (2.65)$$

Les autres termes dans les coefficients f_0 , f_1 et f_2 se calculent sans difficulté supplémentaire. On arrive, en définitif [57] :

$$\gamma_{\pm}(p) = -\frac{e^2 T}{16} \left(5.4252 \mp 0.64736 \bar{p} + (0.88258 - 13.199 \ln \bar{\eta}) \bar{p}^2 + O(\bar{p}^3) \right), \quad (2.66)$$

avec $\bar{p} = \frac{p}{m_F}$ et $\bar{\eta} = \frac{\eta}{m_F}$.

2.4 Conclusion

Dans cette première partie, nous avons calculé les taux d'atténuation des fermions dans le cadre de l'électrodynamique quantique en utilisant l'expansion effective de Braaten et Pisarski.

Ce taux a été calculé jusqu'à l'ordre deux suivant le moment du fermion. On a montré que le résultat est indépendant de la jauge choisie. Néanmoins, les divergences infrarouges rencontrées dans le cadre des théories non-abéliennes telle que la chromodynamique quantique (QCD) [17, 54] persistent encore dans le cadre des théories abéliennes telle que la QED. A partir de ce résultat, on déduit que ces divergences ne sont pas fondamentalement liées à la nature de la théorie.

Il est important de rappeler que les taux d'atténuation sont des quantités physiques importantes pour la compréhension de la phase quark gluon, elles sont reliées

à la durée de vie des différentes quasi-particules existantes dans le plasma. Pour que ces quantités soient utilisables, elles doivent être finies et positives. Il faudrait, pour cela, inclure d'autres effets non-incorporés dans la resomme des HTL. Actuellement, la recherche de ces effets donnent lieu à d'intenses recherches et pourront, une fois identifiées et étudiées, être incluses dans le programme de resomme HTL.

Deuxième partie

Modélisation d'un piège

magnéto-optique unidimensionnel

fortement saturé

Chapitre 3

Eléments théoriques du refroidissement et du piégeage d'atomes par laser

3.1 Introduction

Dépuis la réalisation du Piège Magnéto-Optique (PMO) en 1987 dans l'équipe de Raab [30], le PMO est devenu une technique standard pour obtenir, à partir d'une vapeur chaude d'atomes, un échantillon d'atomes froids confinés spatialement.

Dans cette thèse, on ne s'intéresse qu'au refroidissement Doppler et on choisit, pour commencer, une description d'un PMO avec des atomes à deux niveaux pour faciliter la compréhension des phénomènes physiques. Avec la prise en compte de

la structure hyperfine du niveau excité des atomes¹ et les corrélations entre l'atome considéré quantique et la lumière, on arrive à reproduire de façon satisfaisante les processus observés.

3.2 L'atome à deux niveaux

Considérons les deux niveaux de l'atome; le niveau fondamental $|g\rangle$ stable ou métastable de durée de vie très grande devant la durée de l'expérience considérée et le niveau excité $|e\rangle$ de durée de vie Γ^{-1} . L'atome se désexcite du niveau $|e\rangle$ vers le niveau $|g\rangle$ comme schématisé suivant la figure 3.1. Ces niveaux sont séparés par une énergie $\hbar\omega_A$. L'atome interagit avec un champ électromagnétique de pulsation ω_l dans la direction \hat{z} et d'amplitude $E_l(z, t) = E_0 \cos(\omega_l t + \varphi(z))$.

Pour que la modélisation de la transition pour un atome à deux niveaux soit valable, l'écart entre ω_l et ω_A doit être petit devant les pulsations ω_l et ω_A . On définit le désaccord nu $\delta_0 = \omega_l - \omega_A$. Le terme de couplage entre l'atome et le rayonnement est traité dans l'approximation dipolaire électrique [58, 59], il s'écrit :

$$V_{atome-laser} = -\hat{D} \cdot \vec{E}_l(\vec{R}, t), \quad (3.1)$$

où \hat{D} est l'opérateur dipôle électrique et \vec{R} désigne l'opérateur position du centre de masse. On néglige dans le terme interaction les contributions multipolaires d'ordres supérieurs.

¹La prise en compte de la dégénérescence du niveau fondamental met en évidence les processus sub-Doppler. On arrive à des température beaucoup plus basses de l'ordre de quelques μK pour le césium.

On définit la pulsation de Rabi Ω par l'expression $\hbar\Omega = -\vec{D}_{eg} \cdot \vec{E}_l$, où \vec{D}_{eg} est le moment dipolaire de l'atome. Cette relation exprime l'intensité du couplage atome-champs. La pulsation de Rabi est reliée à l'intensité lumineuse par $\frac{I}{I_{sat}} = 2 \left(\frac{\Omega}{\Gamma}\right)^2$ où I_{sat} et Γ sont respectivement l'intensité de saturation et la largeur naturelle du niveau excité $|e\rangle$.

Dans le domaine des atomes froids, on définit souvent les grandeurs suivantes :

- La vitesse de recul $v_r = \hbar \frac{k_l}{m}$ est le changement de vitesse d'un atome de masse m absorbant un photon résonant d'impulsion $\hbar k_l$.
- L'énergie de recul est l'énergie cinétique d'un atome ayant une vitesse égale à la vitesse de recul, soit $E_r = \hbar\omega_r = \frac{(\hbar k_l)^2}{2m}$.
- L'élargissement Doppler qui est dû aux mouvements des atomes se définit en fonction de l'énergie des photons incidents $\hbar\omega_l$ par $\Delta\omega_D = \frac{v_{at}}{c}\omega_l$.
- La température de recul est la température d'une assemblée d'atomes pour laquelle la largeur à mi-hauteur de la distribution des vitesses correspond à la vitesse de recul.
- La température Doppler est définie par l'expression $T_D = \frac{\hbar\Gamma}{2k_B}$, c'est la température la plus basse qu'on peut atteindre avec des atomes à deux niveaux dans une mélasse optique. Celle-ci est due à la compétition entre le refroidissement Doppler et le chauffage par l'émission spontanée. Bien évidemment, les mécanismes de type sub-Doppler permettent d'atteindre des températures encore plus basses en considérant un niveau fondamental dégénéré et en se mettant

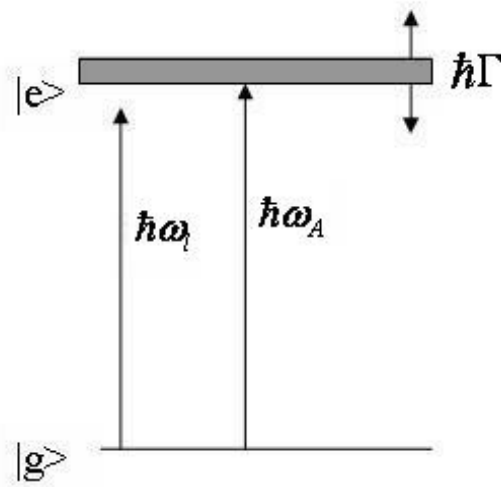


FIG. 3.1: Atomes à deux niveaux.

dans le régime de faibles saturations..

3.3 Forces radiatives agissant sur les atomes à deux niveaux

Dans ce chapitre, il convient d'introduire les forces agissant sur les atomes dans la situation la plus simple. La force moyenne agissant sur l'atome a deux composantes : une composante proportionnelle au gradient de l'intensité appelée force dipolaire ou force réactive et une force proportionnelle au gradient de la phase appelée force dissipative.

3.3.1 Force dissipative ou force de pression de radiation

La force de pression de radiation (ou force dissipative) conserve l'intensité de l'onde laser mais la phase varie dans l'espace. Dans le cas où l'atome est considéré comme un dipôle classique en interaction avec un champ classique², elle exprime la composante en quadrature entre le champ et le dipôle.

$$\vec{F}_{pr} = E_0(\vec{R}) \vec{\nabla} \varphi \operatorname{Im}(D^+ e^{-i\varphi}). \quad (3.2)$$

Cette composante exprime la conservation de l'énergie entre le champ et l'atome [60] :

$$\vec{F}_{pr} = -\hbar \vec{\nabla} \varphi(z) \frac{dN}{dt}. \quad (3.3)$$

Dans le cas d'une onde plane progressive $\vec{\nabla} \varphi(z) = -\vec{k}_l$ et $\vec{F}_{pr} = \hbar \vec{k}_l \frac{dN}{dt}$. Dans le cas où l'on traite quantiquement la structure de l'atome³ $\frac{dN}{dt} = \Gamma \sigma_{ee, \text{stat}} \cdot \Gamma \sigma_{ee, \text{stat}}$ est le taux moyen de cycles d'absorption-émission spontanée. La force de pression de radiation s'écrit finalement sous la forme :

$$\vec{F}_{pr} = \hbar \vec{k}_l \Gamma \sigma_{ee, \text{stat}}. \quad (3.4)$$

Chaque cycle transfère en moyenne l'impulsion $\hbar k_l$ à l'atome. Lors de chaque absorption, l'atome reçoit cette impulsion. L'expression (3.4) peut s'écrire en fonction du paramètre de saturation et pour un atome au repos.

$$F_{pr} = \hbar k_l \Gamma \sigma_{ee, \text{stat}} = \hbar k_l \Gamma \Pi_e = \frac{\hbar k_l \Gamma}{2} \frac{s}{1+s}, \quad (3.5)$$

²L'expression de la force est largement discutée dans les ouvrages traitant des interactions atomes photons.

³L'expression classique de la force continue à être utilisée, plus exactement sa valeur moyenne.

où $s = \frac{(\Omega)^2}{2(\delta_0^2 + \frac{\Gamma^2}{4})}$. On voit bien qu'à faible saturation $\Pi_e = \frac{s}{2}$ et $F_{pr} \rightarrow \frac{\hbar k_l \Gamma}{2} s$, alors qu'à forte saturation $\Pi_e = \frac{1}{2}$ et $F_{pr} \rightarrow \frac{\hbar k_l \Gamma}{2}$.

La dépendance de la force en fonction du désaccord δ_0 est une courbe lorentzienne centrée en $\delta_0 = 0$ et de largeur à mi-hauteur $(2\delta_0^2 + \Gamma^2)^{\frac{1}{2}}$. Pour avoir un ordre de grandeur de la force de pression de radiation, on calcule la force maximale subie par l'atome. A forte saturation $F \rightarrow F_{\max} = \frac{\hbar k_l \Gamma}{2}$, elle correspond à une accélération $a_{\max} = \frac{\hbar k_l \Gamma}{2m}$. Pour l'atome de Rubidium cette accélération vaut $1.1 \cdot 10^5 \text{ m/s}^2$ soit 11000 fois l'accélération de la pesanteur. Evidemment, la variation de la quantité de mouvement $\hbar k_l$ est très inférieure devant l'impulsion thermique mv_{th} , les deux quantités sont dans le rapport $\frac{\hbar k_l}{mv_{th}} \sim 10^{-5}$. En revanche, le nombre de cycles qu'on peut effectuer avec les lasers fait que cette force peut ralentir des jets atomiques. Avec l'accélération a_{\max} et une vitesse initiale v_0 de l'ordre de la centaine de mètre par seconde l'atome est arrêté sur une distance de 1m.

3.3.2 Force dipolaire ou force réactive

Contrairement à la force dissipative, qui mesure la variation spatiale de la phase, la force dipolaire \vec{F}_{dip} n'existe que si l'amplitude du champ comporte des variations spatiales. C'est la composante en phase du dipôle avec le champ :

$$\vec{F}_{dip} = \vec{\nabla} E_0(\vec{R}) \text{Re}(D^+ e^{-i\varphi}), \quad (3.6)$$

cette force est à l'origine du processus de la redistribution des photons du champ entre ces différents modes. C'est une force qui dérive d'un potentiel (potentiel dipolaire) :

$U = -\vec{D} \cdot \vec{E}_l(\vec{R}, t)$, $\vec{F}_{dip} = -\vec{\nabla}U$. Pour un atome à deux niveaux :

$$\vec{F}_{dip} = -\frac{\hbar\delta_0}{2} \frac{\vec{\nabla}s(\vec{R})}{1+s(\vec{R})}, \quad (3.7)$$

\vec{F}_{dip} dérive du potentiel lumineux U :

$$U = \frac{\hbar\Delta}{2} \text{Ln}(1+s). \quad (3.8)$$

Introduit pour la première fois par C. Cohen Tannoudji [61] dans la théorie de l'atome habillé, il décrit le déplacement des niveaux d'énergie de l'atome sous l'effet de la lumière. Le déplacement lumineux est défini par $\Delta' = \frac{s}{2}\Delta = \frac{U}{\hbar}$.

3.4 La mélasse optique

Jusqu'à présent, la force de pression de radiation nous permet d'accélérer ou de ralentir les atomes selon qu'ils se déplacent dans le même sens ou dans le sens contraire de l'onde laser. Pour pouvoir refroidir une vapeur atomique, c'est à dire réduire la largeur de la courbe de la distribution des vitesses, il faudrait appliquer une force sélective en vitesse. Pour un atome ayant une vitesse V dans le sens opposé de l'onde, l'expression de la force du paragraphe précédent reste la même, il suffit juste de remplacer le désaccord δ_0 par un désaccord effectif (avec une correction Doppler) $\delta_0 - k_l V$. Pour comprendre ce fait, il suffit de se mettre dans le référentiel au repos de l'atome.

Supposons maintenant qu'on ait deux ondes en contra-propagation de même fréquence et de vecteurs d'onde opposés. Les atomes en mouvement opposé à celui de

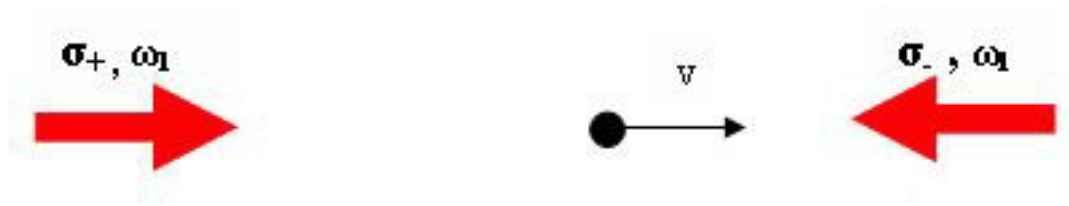


FIG. 3.2: La mélasse optique.

l'onde se voit une onde plus proche de la résonance que ceux qui viennent dans l'autre sens, ils absorbent l'onde lumineuse avec une probabilité plus élevée. La même logique est valable pour les atomes dans la direction opposée, ils sont ralentis par l'autre onde. Par conséquent, la résultante des forces dissipatives dues aux deux ondes s'opposent toujours aux mouvement des atomes. La distribution des vitesses est donc réduite, c'est l'idée de base du refroidissement Doppler proposé en 1975 par Hänsch et Schawlow [27].

En effectuant les changement $\delta_0 \rightarrow \delta_0 - k_l V$ (onde gauche de la figure 3.2) et $\delta_0 \rightarrow \delta_0 + k_l V$ (onde droite), dans la limite de faibles saturations, la résultante des deux forces dues aux deux ondes s'écrit :

$$F_{\text{Doppler}} = \frac{\hbar\Gamma}{2} (s_+ - s_-) k_l = -\alpha V + o\left(\left(\frac{k_l V}{\Gamma}\right)^2\right), \quad (3.9)$$

avec $s_{\pm} = \frac{\Omega^2}{2((\delta_0 \mp k_l V)^2 + \frac{\Gamma^2}{4})}$

Le coefficient α est donné par l'expression :

$$\alpha = -\hbar k_l^2 \frac{\Omega^2}{\Gamma^2} \frac{\frac{\delta_0}{\Gamma}}{\left(\left(\frac{\delta_0}{\Gamma}\right)^2 + \frac{1}{4}\right)^2}. \quad (3.10)$$

L'expression (3.9) de la force suggère l'existence d'une vitesse de capture $v_c \cong \frac{\Gamma}{k_l}$ au delà de laquelle le déplacement Doppler met les atomes hors résonance.

Pour un désaccord rouge $\delta_0 < 0$, α est positif et la force F_{Doppler} est de type visqueux. Avec ce type de refroidissement, la température limite $T_D = \frac{D_{\text{Doppler}}}{k_B \alpha}$ que l'on peut atteindre est déterminée par le caractère aléatoire de l'émission spontanée, où D_{Doppler} est le coefficient de diffusion. La distribution des vitesses dans la mélasse est Maxwellienne avec une largeur minimale donnée par la relation $T_D = \frac{\hbar \Gamma}{2k_B}$ (146 μK pour le rubidium). Dans la mélasse observée par le groupe de S. Chu [29], le nombre d'atomes atteint est de l'ordre de 10^6 et l'intersection des trois paires de faisceaux est de 1cm de diamètre. Pour réaliser des densités plus élevées, des tailles plus réduites et des temps de vie plus importants, la force agissant sur les atomes doit être sélective en position. Ce qui ne peut pas être réalisé avec des théories à deux niveaux. En constatant que $\nabla \cdot F_{\text{Doppler}}$ est nulle, le théorème d'Earnshaw optique [62] interdit le piégeage par la seule force de pression de radiation.

L'objet de la partie suivante est d'utiliser une force de rappel qui lèvera la dégénérescence Zeeman du niveau excité. On montrera que la force résultante est sélective en position, ce qui permettra le piégeage d'atomes.

3.5 Le piège magnéto-optique

Pour rendre la force agissant sur les atomes sélective en position, la méthode la plus simple et la plus utilisée à ce jour consiste à utiliser un champ magnétique inhomogène.

Le Piège Magnéto-Optique est donc réalisé en ajoutant un champ magnétique à la mélasse optique. Expérimentalement, un champ magnétique linéaire en z peut être produit grâce à la disposition d'une paire de bobines en configuration anti-Helmoltz.

Décrivons, maintenant, le fonctionnement d'un PMO à une dimension pour la transition atomique la plus simple. Considérons un atome fictif sans spin avec un état fondamental $|f\rangle$ de moment cinétique nul et un état excité $|e\rangle$ de moment cinétique $J = 1$. Le champ magnétique B est choisi nul à l'endroit où l'on souhaite piéger les atomes. En $z > 0$ (respectivement $z < 0$) le champ est positif (respectivement négatif). Les atomes sont éclairés avec deux ondes contra-propagantes de même fréquence, de même intensité et désaccordées sur le rouge par rapport à la transition atomique (la force résultante est de type visqueux). L'onde venant de gauche (figure 3.3) est polarisée σ_+ et l'onde venant de droite est polarisée σ_- . Le champ magnétique $B = bz$ lève la dégénérescence des sous-niveaux $|e; m_e = \pm 1, 0\rangle$ de l'état excité et les déplacements Zeeman correspondants dépendent linéairement de la position. Par symétrie, un atome au centre O ressent une force moyenne nulle. Un atome situé à droite de O est résonant essentiellement avec l'onde venant de droite et ressent une force de pression de radiation dirigée vers le centre. Au contraire, les atomes en $z < 0$ sont résonants avec l'onde venant de gauche.

Avec les notations précédentes et en définissant les désaccords effectifs $\Delta_{\pm} =$

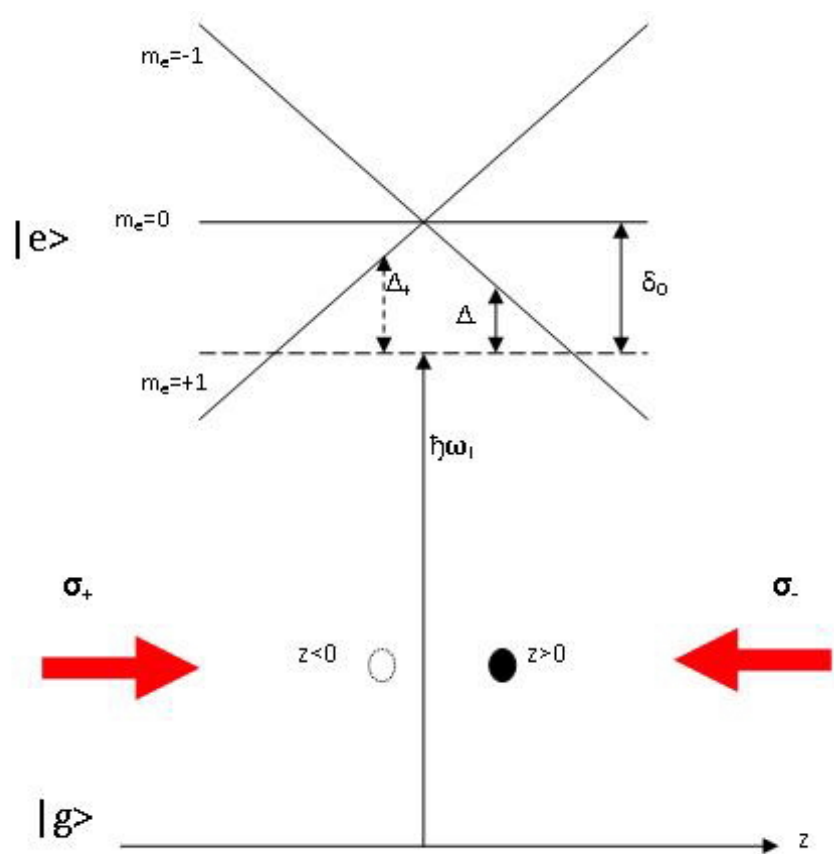


FIG. 3.3: Le piège magnéto-optique

$\delta_0 \mp k_l V \mp \frac{\mu_B b}{\hbar} z$, la force de rappel s'écrit au voisinage du centre $z = 0$:

$$F = - \left(k_l \mu b s_0 \frac{-2\Gamma \delta_0}{\delta_0^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \right) z,$$

où μ_B le magnéton de Bohr, b le gradient de champ magnétique, μ le moment magnétique de l'atome dans l'état excité et $s_0 = \frac{(\Omega)^2}{2(\delta_0^2 + \frac{\Gamma^2}{4})}$ le paramètre de saturation supposé petit devant 1. La configuration à trois paires de faisceaux σ^+ et σ^- (indépendants ou rétro-réfléchis) est de loin la plus utilisée. Les faisceaux se croisent au centre d'une cellule contenant une vapeur atomique à une pression de l'ordre de 10^{-8} torr. Dans le chapitre suivant, on présentera les différentes étapes de la réalisation expérimentale d'un piège magnéto-optique où les faisceaux sont rétro-réfléchis.

Chapitre 4

Dispositif expérimental

4.1 Introduction

Le piégeage des atomes est actuellement très utilisé dans les expériences de physique atomique et de la physique non-linéaire. Le choix des alcalins est motivé par leur propriété de n'avoir qu'un seul électron actif.

Dans ce chapitre, on abordera l'essentiel de la réalisation expérimentale d'un piège magnéto-optique d'atomes de rubidium à faisceaux rétro-réfléchis. On présentera, dans un premier temps, les sources laser (piège, repompeur et leurs esclaves). Dans un deuxième temps, on passera en revue le montage du piège : le champs magnétique, la cellule et les différents montages de dioptries.

La préparation des sources laser est sans doute la phase la plus délicate dans la réalisation du piège magnéto-optique. Plusieurs facteurs entrent en jeu pour arriver

à piéger et à refroidir efficacement les atomes :

- La largeur spectrale de la raie d'émission doit être bien inférieure à la largeur Γ du niveau excité pour pouvoir définir le désaccord à mieux que Γ ($\Gamma = 5.9$ MHz pour le ^{87}Rb);
- La fréquence des lasers doit être stabilisée au voisinage de la transition $5^2S_{\frac{1}{2}}^{F=2} \rightarrow 5^2P_{\frac{3}{2}}^{F'=3}$ du rubidium ($\lambda \cong 780$ nm) avec un désaccord de quelques Γ ;
- L'intensité délivrée par les diodes laser doit être suffisante pour assurer un ralentissement efficace des atomes. Elle doit être de l'ordre de $20 I_{sat}$ pour chaque paire de faisceaux;
- L'accordabilité en fréquence doit être assurée sur une gamme de plusieurs Γ pour pouvoir explorer une fenêtre significative dans le désaccord δ_0 .

4.2 L'atome de Rubidium

Le rubidium appartient à la famille des alcalins (Na, Cs, ..). Il existe dans la nature sous la forme de deux isotopes, le ^{85}Rb , stable et plus abondant (72.16 %) et le ^{87}Rb , instable mais avec une longue demi-vie. Ses différentes propriétés sont rassemblées avec une très grande précision dans la référence [63]. A température et pression ambiantes, le rubidium est dans un état solide de couleur blanc argenté. Pour avoir une vapeur de rubidium (nécessaire pour les expériences de piégeage), il faudrait chauffer au delà de la température de fusion qui est de 39.31 C° . Les structures fine et hyperfine sont représentées sur la figure 4.1.

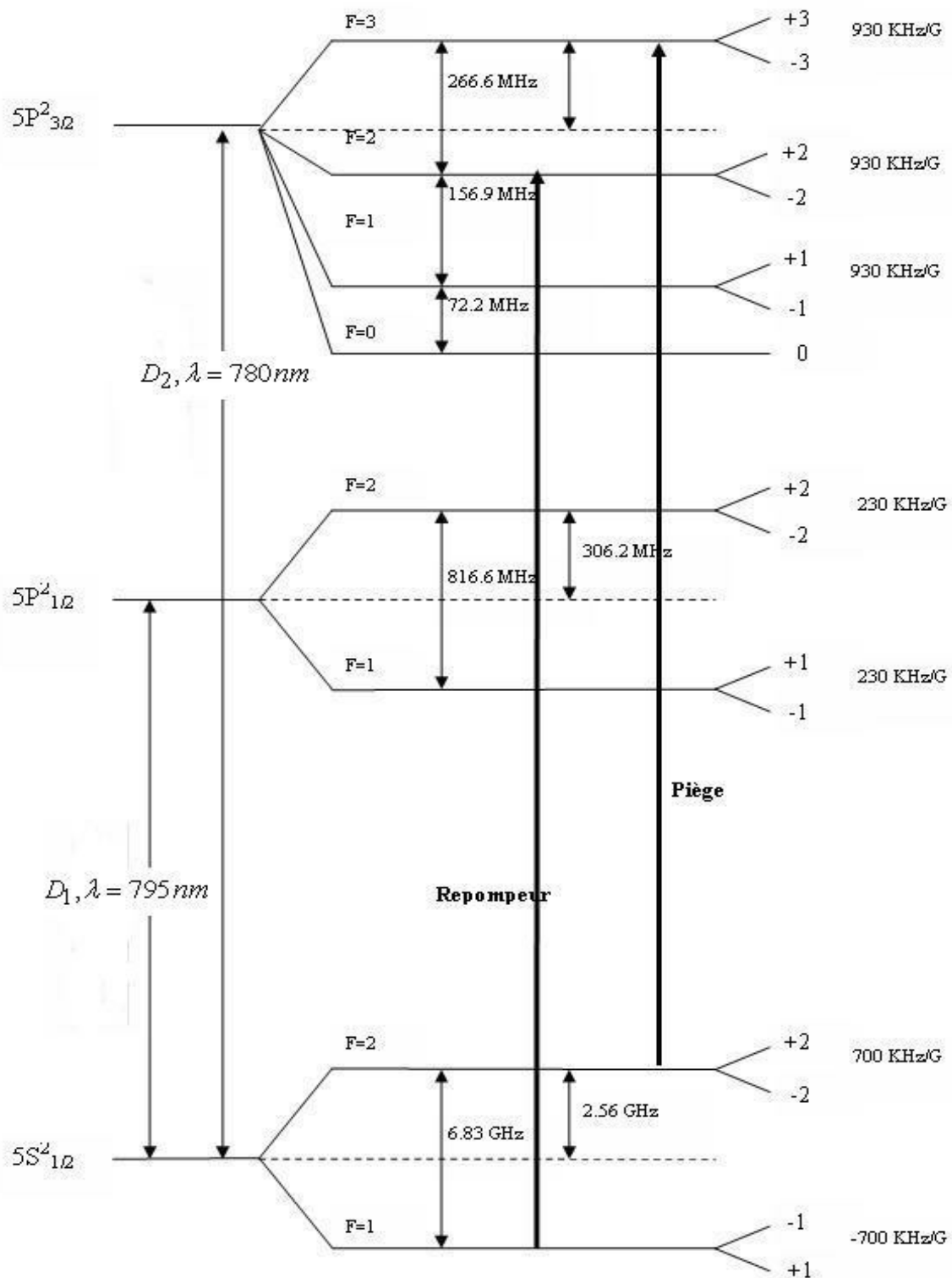


FIG. 4.1: Diagramme des premiers niveaux d'énergie du Rubidium 87. Sont aussi indiqués les facteurs de Landé et les déplacements Zeeman pour chaque niveau.

La structure fine résulte du couplage entre le moment angulaire orbital \vec{L} de l'électron externe et son moment angulaire de spin (interaction spin-orbite). Les valeurs du moment angulaire total de l'électron sont : $|L - S| \leq J \leq |L + S|$.

Pour le ^{87}Rb , le fondamental $L = 0$ et $S = \frac{1}{2}$ correspond à $J = \frac{1}{2}$.

La valeur $L = 1$ donne $J = \frac{1}{2}$ ou $J = \frac{3}{2}$.

La transition $L = 0 \rightarrow L = 1$ est appelée la raie D . On distingue la D_1 : $5^2S_{\frac{1}{2}} \rightarrow 5^2P_{\frac{1}{2}}$ et la D_2 : $5^2S_{\frac{1}{2}} \rightarrow 5^2P_{\frac{3}{2}}$ ($n=5$: nombre quantique principal et $2S+1=2$ dans la notation usuelle de physique atomique).

La structure hyperfine, quant à elle, résulte de l'interaction entre le moment angulaire total \vec{J} et le spin nucléaire \vec{I} . Le moment angulaire total de l'atome est défini par $\vec{F} = \vec{J} + \vec{I}$. Ses valeurs sont résumées dans le tableau ci-dessous, elles sont comprises entre $|J - I|$ et $|J + I|$, sachant que pour le ^{87}Rb le spin nucléaire $I = \frac{3}{2}$:

Le niveau	Moment cinétique J	Moment cinétique total F
Fondamental	1/2	2 valeurs F= 1, 2
L'excité de la D ₁	1/2	2 valeurs F= 1, 2
L'excité de la D ₂	3/2	4 valeurs F= 0, 1, 2, 3

Le fait que le rubidium soit un atome à un seul électron actif lui confère une structure d'atomes à deux niveaux. Le refroidissement des atomes se fait en exploitant la raie D_2 (transition de refroidissement) de longueur d'onde voisine de 780 nm. L'intensité de saturation de la transition $I_{sat} = I(\Omega = \Gamma/\sqrt{2}) = 1.67 \text{ mW/cm}^2$, où Ω est la fréquence de Rabi. La vitesse de recul produite par un laser de vecteur d'onde k_l est $v_r = \hbar k_l / M = 5.9 \text{ mm/s}$, l'énergie et la température de recul sont

$$E_r = 15.5 * 10^{-12} \text{ eV}, T_r = 0.36 \text{ } \mu\text{K}.$$

La transition de refroidissement $F=2$ vers $F'=3$ est une transition fermée ; les transitions non-radiatives sont interdites, c'est à dire de l'état $F'=3$, l'atome ne passe pas directement à l'état $F'=2$. En revanche, comme l'écart entre $F'=2$ et $F'=3$ est assez faible (266 MHz), le "laser piège" peut exciter l'atome dans $F'=2$. Depuis cet état et selon les règles de sélection, il peut retomber dans l'état fondamental $F=1$ et comme la séparation des deux niveaux hyperfins $F=1$ et $F=2$ est de 6.84 GHz, les atomes qui se trouvent à l'état $F=1$ sont perdus. Un faisceau dit "repompeur" entre $F=1$ et $F'=2$ est nécessaire. Les transitions induites par les faisceaux "piège et repompeur" sont représentées sur la figure 4.1.

4.3 Stabilisation des diodes lasers

Le progrès dans le domaine de l'opto-électronique a fourni au domaine des atomes froids des sources lasers d'excellentes qualités, essentiellement à multi-puits quantiques. Elles sont peu onéreuses, de dimensions réduites et sont accordables autour des gammes des fréquences souhaitées. Dans cette section, nous présentons les principales caractéristiques des diodes lasers que nous avons utilisées pour le piégeage et le repompage.

Le montage du laser maître fournit un faisceau de très bonne résolution spectrale mais de faible puissance ($\sim 5mW$), insuffisante pour piéger les atomes. Les diodes laser esclaves, quant à elles, sont des diodes de puissance qui, sous certaines conditions

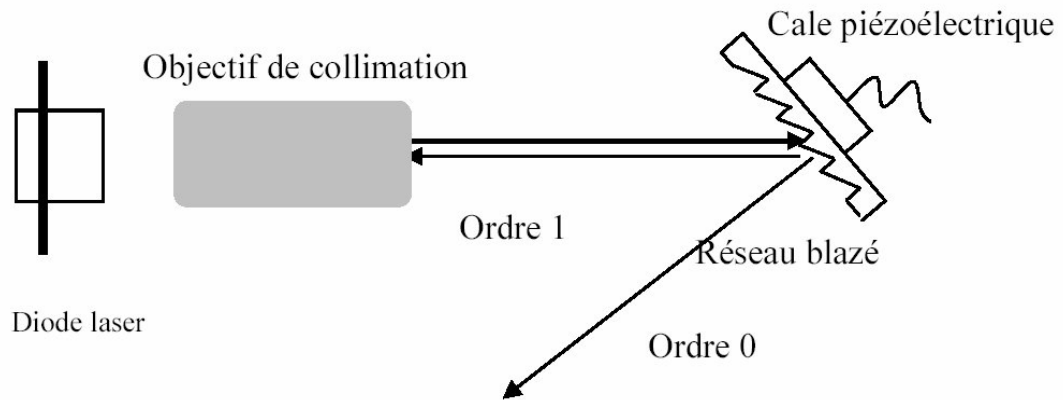


FIG. 4.2: Diode en cavité étendue

de température et d'intensité de courant de pompage, arrivent à émettre à la même fréquence du maître (copient la fréquence et la largeur spectrale du maître) à une puissance suffisante pour les expériences de piégeage. On commencera par décrire le fonctionnement d'un laser maître. On montrera ensuite, par l'injection des lasers esclaves, comment on pourra obtenir des faisceaux aux fréquences connues à mieux que la largeur naturelle¹.

La stabilisation de la fréquence laser sur la transition atomique est assurée par la méthode d'absorption saturée. Celle-ci fixe comme référence la transition atomique elle-même. Deux lasers maîtres sont montés, l'un pour le piège, l'autre pour le repompeur.

¹Une méthode d'auto hétérodynage permet de mesurer la largeur à mi-hauteur des lasers maîtres qui est de l'ordre de 2 MHz.

4.3.1 Le laser maître

En mode libre, la longueur d'onde d'émission dépend fortement de la température et de l'intensité de pompage de la diode, elle peut changer d'un jour à l'autre voire même au cours de l'expérience. Pour améliorer la stabilité de l'émission laser, on utilise un montage en cavité étendue. La diode est insérée dans une cavité externe d'un centimètre de longueur (figure 4.2). Le miroir de sortie est un réseau blazé de diffraction par réflexion. La diode joue alors le rôle d'un amplificateur dans une cavité externe. On oriente le réseau de telle manière que l'ordre 1 soit renvoyé dans la cavité, alors que l'ordre 0 est éjecté vers l'extérieur. Cela permet d'abaisser le niveau des pertes pour les ondes réfléchies dans la cavité et permet ainsi de choisir la longueur d'onde d'émission laser.

Le faisceau sortant de la diode laser est de géométrie elliptique dont le grand axe est choisit parallèle aux lignes de diffraction du réseau. On veille à ce que l'axe optique soit bien ajusté au centre du faisceau pour remédier à toute aberration sphérique. De plus, un mauvais alignement du réseau sur cet axe provoque l'apparition de deux faisceaux. Pour ce faire, deux vis règlent les positions horizontale et verticale du réseau. Pour s'assurer du retour de l'ordre 1, il faut que le faisceau retour coïncide avec le faisceau aller.

La fréquence du laser est ajustable en utilisant la vis horizontale puisque le grand axe est selon cette direction et que le faisceau est moins sensible par rapport à l'alignement horizontal. Quand la longueur d'onde est loin de la longueur désirée, la

température du laser peut être modifiée pour la ramener à une plage plus proche. La variation de la température induit une variation de la longueur de la cavité externe et modifie ainsi la distance entre les modes. Ceci se fait en ajustant le courant passant dans l'élément Peltier installé sous le support du système laser. Cet élément peut chauffer ou refroidir selon que le courant le traverse dans un sens ou dans l'autre.

Le faisceau de sortie de géométrie elliptique, est rendu circulaire à l'aide d'un couple de prismes anamorphoseurs. Il passe ensuite par un isolateur optique ne laissant passer la lumière que dans un sens et empêche toute lumière parasite de revenir perturber le comportement du laser. Par la suite, une partie du faisceau laser est utilisée pour l'injection des esclaves et l'autre partie est envoyée au montage d'absorption saturée.

Balayage de la fréquence laser

La fréquence du laser peut être balayée à l'aide d'une cale piézo-électrique placée derrière le réseau de diffraction². La haute tension appliquée induit un appui sur le réseau et cela a pour effet soit de tourner le réseau ou de changer la longueur de la cavité externe. Dans les deux cas la longueur d'onde d'émission change. Si le balayage en fréquence est continu, c'est à dire, il n'y a pas de sauts de modes, les deux effets sont équivalents. Cependant, en augmentant significativement la tension, des sauts de modes peuvent apparaître. Pour y remédier, on fait varier simultanément le courant

²L'épaisseur de la cale varie en fonction de la tension appliquée. Néanmoins, cet élément n'a pas une réponse linéaire en fonction de la tension appliquée, à fortiori, un effet d'hystérésis est possible.

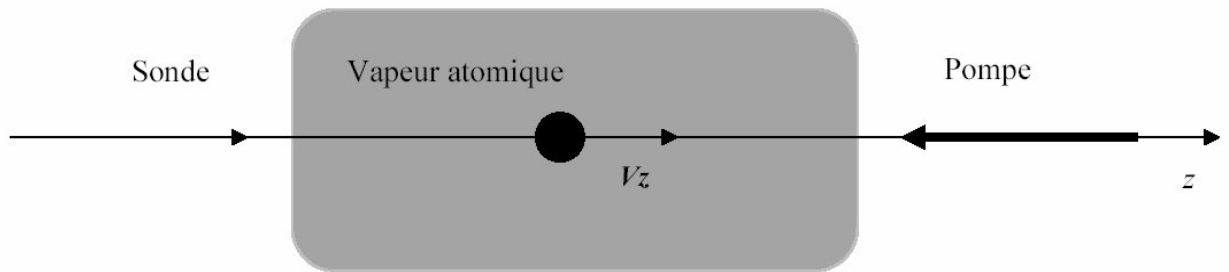


FIG. 4.3: Absorption saturée

de pompage de la diode. On arrive ainsi à faire varier la fréquence d'émission sur une plage de 10 GHz sans être altérée par des sauts de mode.

Absorption saturée et verrouillage en fréquence

Dans le but de stabiliser la fréquence, on utilise un montage d'absorption saturée qui permet de verrouiller la fréquence sur une transition atomique. On superpose un faisceau assez intense, la pompe, sur un autre faisceau contrapropageant de faible intensité, la sonde, sur une cellule témoin de rubidium. Le signal d'absorption de la sonde nous permet de repérer les transitions qui nous serviront de référence pour le laser. Tout écart de la fréquence d'émission à cette référence est corrigée à l'aide d'une boucle d'asservissement.

Expliquons le principe de l'absorption saturée (figure 4.3). Dans la cellule, les atomes ayant des vitesses $V_z > 0$ vont absorbés préférentiellement la sonde tels que $\nu_s \left(1 - \frac{V_s}{c}\right) = \nu_0$, l'intensité de celle-ci diminue. La fréquence de la sonde est balayée

en faisant varier finement la longueur de la cavité étendue. Derrière la cellule est placée une photodiode qui enregistre le profil Doppler d'absorption de la sonde (éventuellement gaussien). On superpose une pompe intense de fréquence $\nu_p = \nu_s + 2\delta\nu$. Les atomes qui sont résonants avec la pompe sont tels que $\nu_p \left(1 + \frac{V_s}{c}\right) = \nu_0$, ils absorbent ce faisceau qui sature la transition atomique. Très souvent, la pompe et la sonde interagissent avec des classes de vitesse différentes et sont donc absorbées indépendamment. Néanmoins, quand les deux faisceaux sont résonants avec la même classe de vitesses, i. e. $\nu_s \approx \nu_0 - \delta\nu$, les atomes correspondants sont déjà saturés par la pompe, ainsi la sonde traverse la cellule sans être absorbée. Il apparaît dans le profil d'absorption de la sonde un pic de transmission à $\nu_s \approx \nu_0 - \delta\nu$ de largeur Γ . On arrive par effet Doppler à visualiser les différentes raies d'absorption d'une vapeur atomique. La sonde étant balayée sur 1GHz, toutes les transitions possibles à partir du sous niveau hyperfin fondamental $F = 2$ peuvent être excitées ($F = 2 \rightarrow F' = 1$, $F = 2 \rightarrow F' = 2$, $F = 2 \rightarrow F' = 3$).

Expérimentalement, la pompe est décalée de la sonde en utilisant un montage en oeil de chat. Le faisceau émis de la source est dévisé à l'aide d'un cube séparateur de polarisations (PBS) en une partie transmise de polarisation horizontale constituant la sonde et une partie réfléchie de polarisation verticale effectuant un aller retour dans le montage en oeil de chat. En plus d'être décalée de $2\Delta\nu$, la pompe est modulée à quelques MHz près de sa valeur moyenne. La sonde et la pompe sont contrapropageantes sur la cellule. Un signal de transmission est reçu sur une photodiode et

traité par un dispositif de détection synchrone qui nous permet d'obtenir la dérivée du signal d'absorption. Cette dernière est utilisée comme un signal d'erreur pour l'asservissement en fréquence³. L'ensemble : la diode laser à cavité étendue, l'absorption saturée et la détection synchrone constituent ce que l'on appelle le laser maître (figure 4.4).

4.3.2 Injection des esclaves

La puissance délivrée par le faisceau maître est relativement faible. A une intensité de courant de 120 mA, la puissance mesurée est de 8 mW, soit un rendement de conversion de 0.07 W/A. Pour pouvoir piéger des atomes, il faut utiliser des diodes lasers de puissance, appelées esclaves, qui vont reproduire les caractéristiques du maître (longueur d'onde et phase) avec une plus grande puissance. Bien que la face d'entrée de la diode est de quelques μm^2 , la superposition du faisceau maître sur le faisceau esclave est possible. En utilisant la fenêtre d'éjection de l'isolateur optique, le faisceau maître remonte jusqu'à la cavité de la diode laser esclave. Cette dernière est injectée dès que la fréquence de l'un de ses modes libres coïncide avec la fréquence du laser maître. Le schéma de l'injection des deux diodes esclaves est représenté sur la figure 4.5.

L'injection des esclaves n'est en général pas facile et se fait sur des gammes très

³Ce signal est ramené vers l'alimentation de contrôle de la câle piézo-électrique afin de corriger toute variation de la cavité externe. En conséquence, la fréquence du laser est asservie sur la fréquence souhaitée du rubidium⁸⁷.

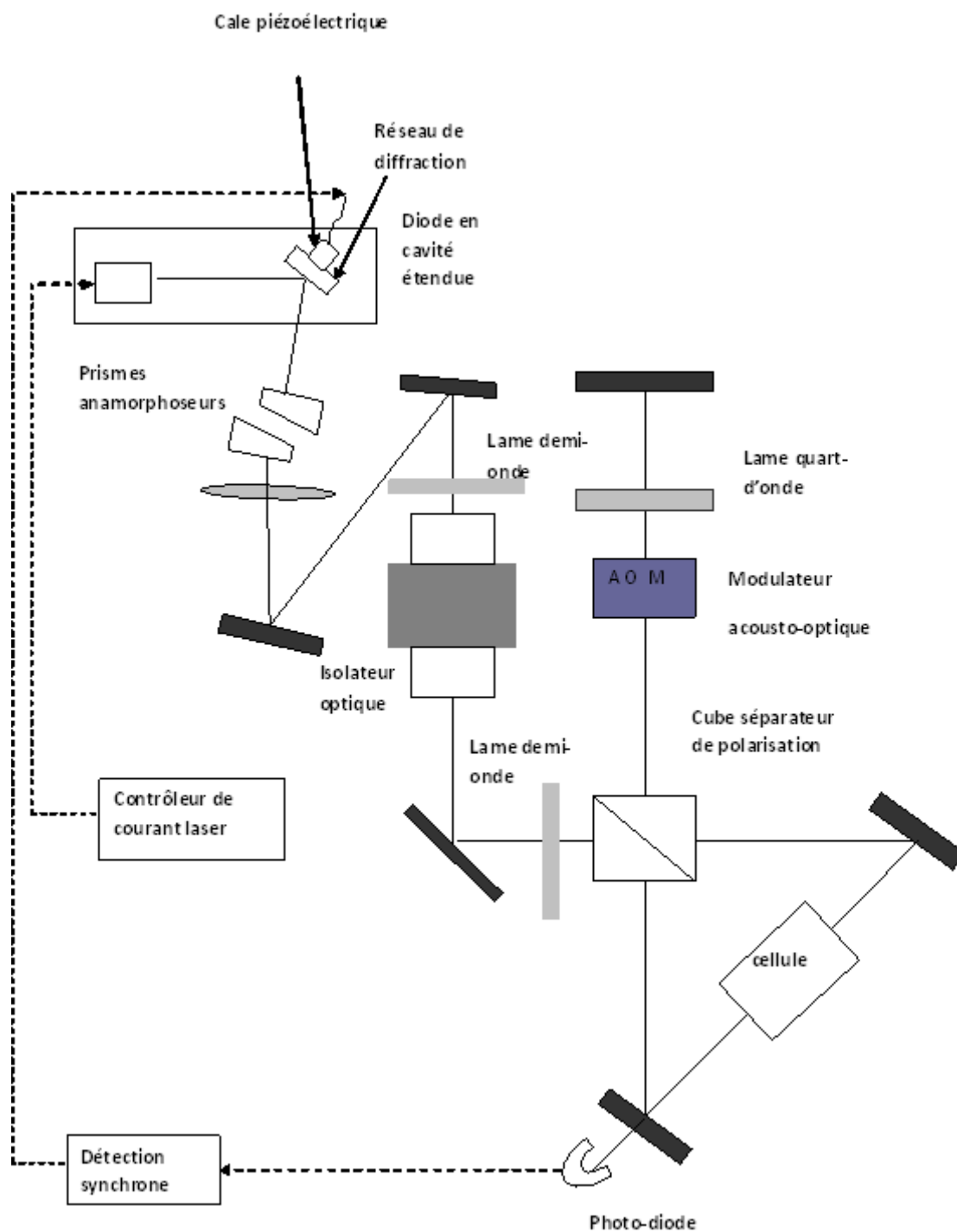


FIG. 4.4: Montage du laser maître du faisceau piège.

étroites de courant et de température. L'optimisation dépend fortement de la température externe. L'idéal est de travailler à une température proche de celle du laboratoire. La fréquence du faisceau maître est maintenue sur la transition souhaitée du rubidium aux conditions souhaitées, en particulier, loin de tout indésirable saut de mode.

Pour optimiser la plage d'injection, plusieurs mesures ont été relevées en faisant varier par exemple l'intensité de courant pour différentes valeurs de température tout en gardant les valeurs les plus stables de courant et de température des lasers maîtres.

Caractérisation des diodes lasers

La diode maître piège Elle mesure à peine 1mm. La diode utilisée est de type Hitachi à multi-puits quantiques AlGaAs de $0.78 \mu\text{m}$ de largeur de bande interdite. Le courant seuil typique en mode libre est de 45 mA. La divergence du faisceau est estimée par le constructeur à une température de $20 \text{ }^\circ\text{C}$ à $8^\circ \leq \theta_{\parallel} \leq 10^\circ$ et $18^\circ \leq \theta_{\perp} \leq 28^\circ$. A l'aide d'un Wattmètre placé sur le trajet du faisceau, on mesure la puissance émise en cavité étendue en fonction du courant (le résultat est donné sur la figure 4.6).

Sur cette figure, on remarque que le courant seuil diminue sous l'effet du faisceau retour, $I_{\text{seuil}} = 28 \text{ mA}$ soit 37% plus petite qu'en mode libre. L'efficacité de conversion est donnée par la pente de cette courbe, elle est de 0.0716 W/A .

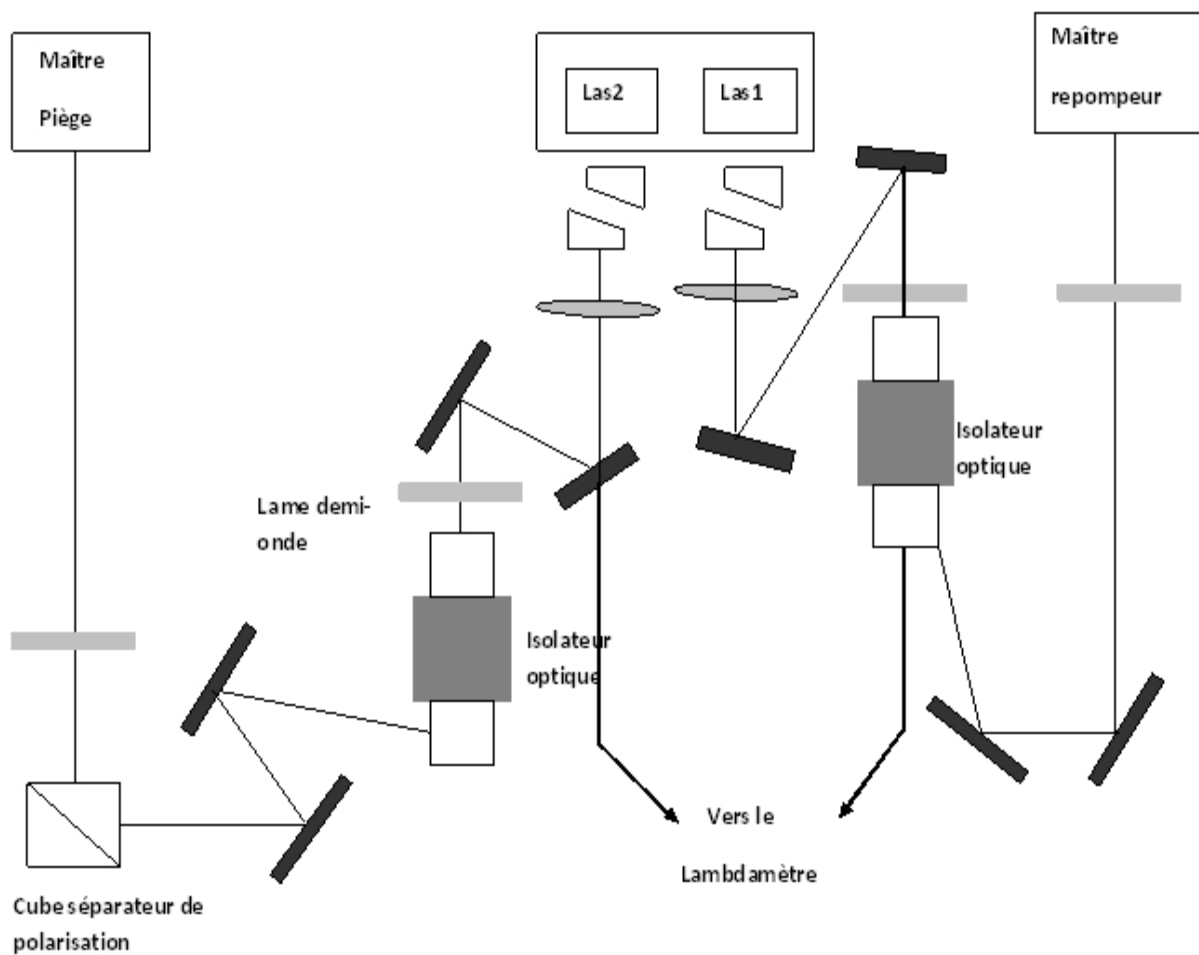


FIG. 4.5: Schéma de l'injection des esclaves.

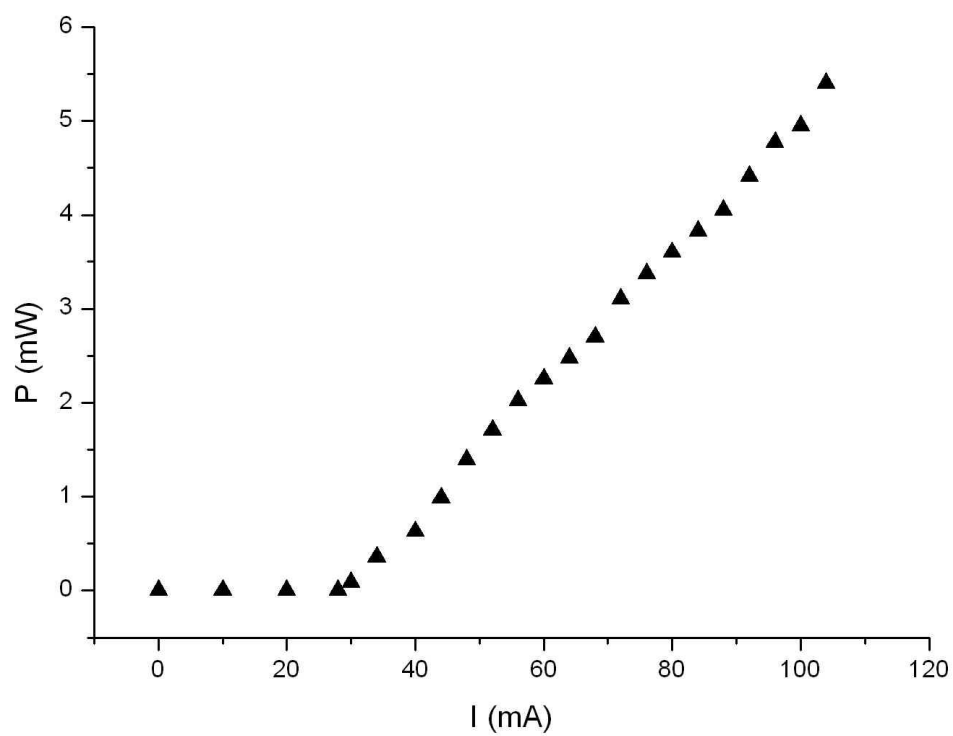


FIG. 4.6: Puissance de la diode maître en fonction du courant de pompage.

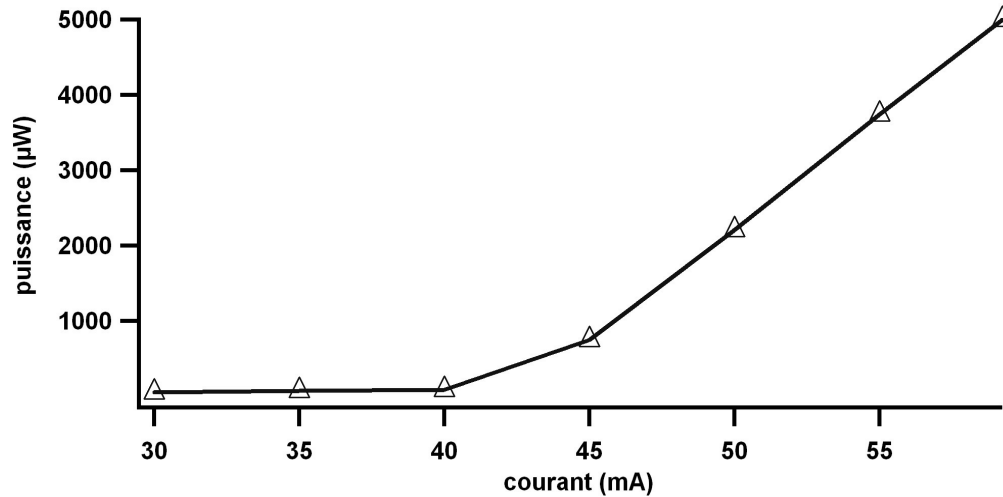


FIG. 4.7: Puissance lumineuse émise par la DBR en fonction du courant. Le rendement de conversion est de 0.003 W/A

La diode maître repompeur La diode utilisée est une DBR (Distributed Bragg Reflector) à puits quantique AlGaAs de longue cavité qui permet d'avoir une largeur de raie assez faible (~ 1 MHz). Elle émet à une fréquence centrale de 780 nm et la puissance nominale est de 4 mW. Le seuil de courant de l'émission est de 40 mA. La figure 4.7 donne la puissance émise de la DBR en fonction du courant. La mesure de la largeur de raie à l'aide de la méthode d'hétérodynage n'a pas aboutie à cause de la faible puissance de celle-ci. En fonction de la température, la longueur d'onde varie linéairement (figure 4.8), on mesure une pente de 0.062 nm/°C.

Les esclaves La diode utilisée est de même type que celle insérée dans le montage du maître piège. On présente ici les caractéristiques d'émission de cette diode (longueur d'onde et puissance) en fonction de la température et du courant de pompage.

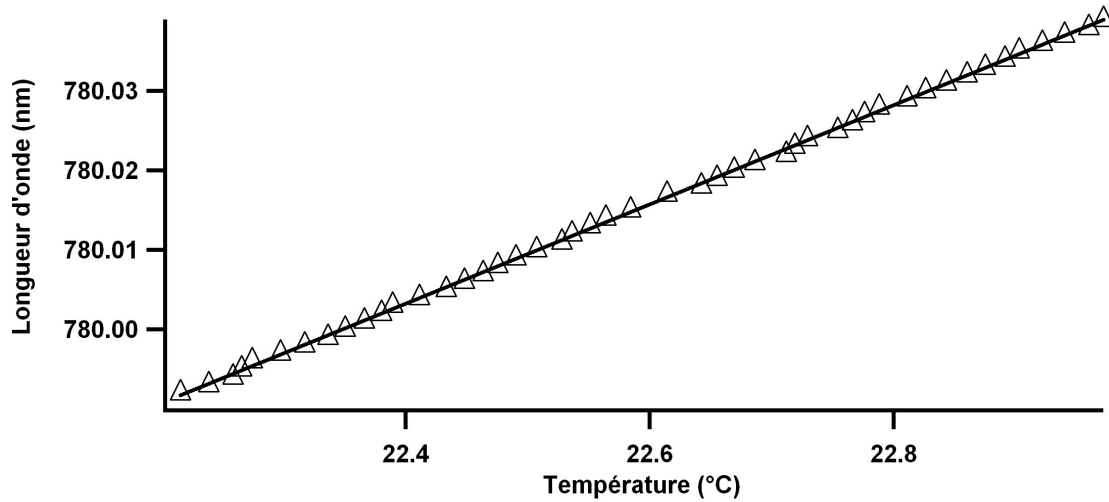


FIG. 4.8: Longueur d'onde d'émission de la DBR en fonction de la température.

En température La longueur d'onde est une fonction linéaire de la température avec parfois des sauts de modes. Le même comportement est observé pour les deux diodes esclaves utilisées. La pente est identique sur toutes les branches (figure 4.9), elle est de 0.056 nm/C° . Sur cette figure, on peut remarquer que pour avoir un laser stable sur la transition $\lambda = 780.028 \text{ nm}$, il faudrait travailler à des courants voisins de 50 mA .

En intensité de pompage Le constructeur indique une efficacité de conversion comprise entre 0.35 et 0.7 W/A . La figure 4.10 donne la puissance en fonction du courant de la diode esclave piège, la pente est de 0.552 W/A . Ces mesures ont été obtenues dans le cas où l'esclave est injecté et émet à la même fréquence du maître. On observe le même comportement pour la diode laser repompeur.

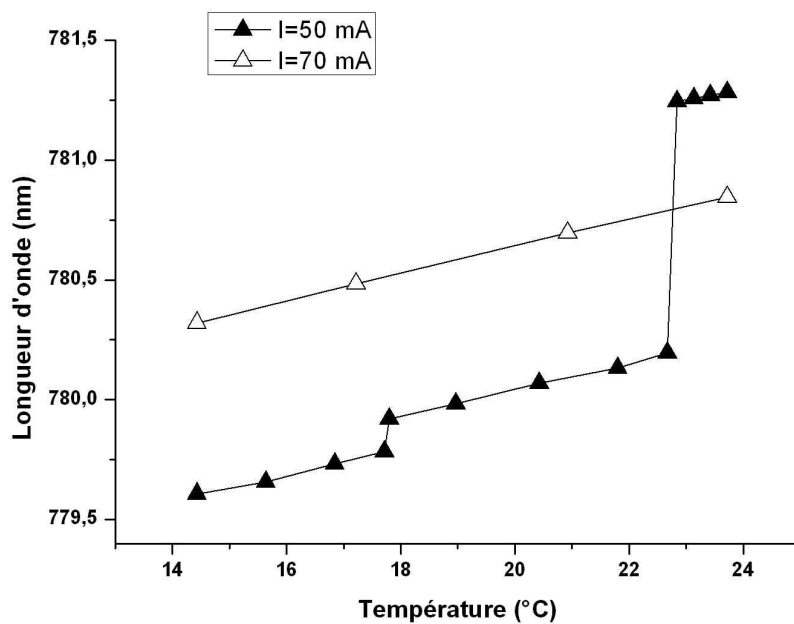


FIG. 4.9: Longueur d'onde en fonction de la température pour deux valeurs du courant.

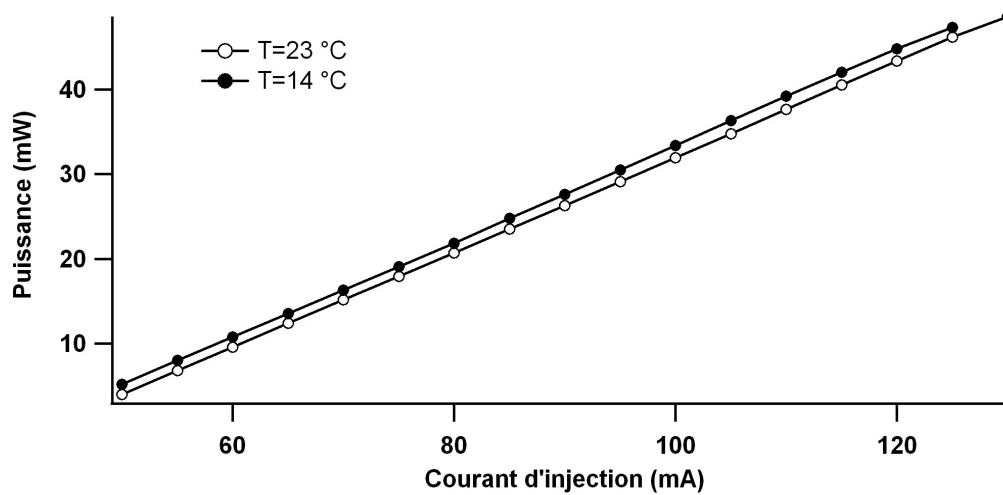


FIG. 4.10: Puissance d'émission de la diode esclave en fonction du courant.

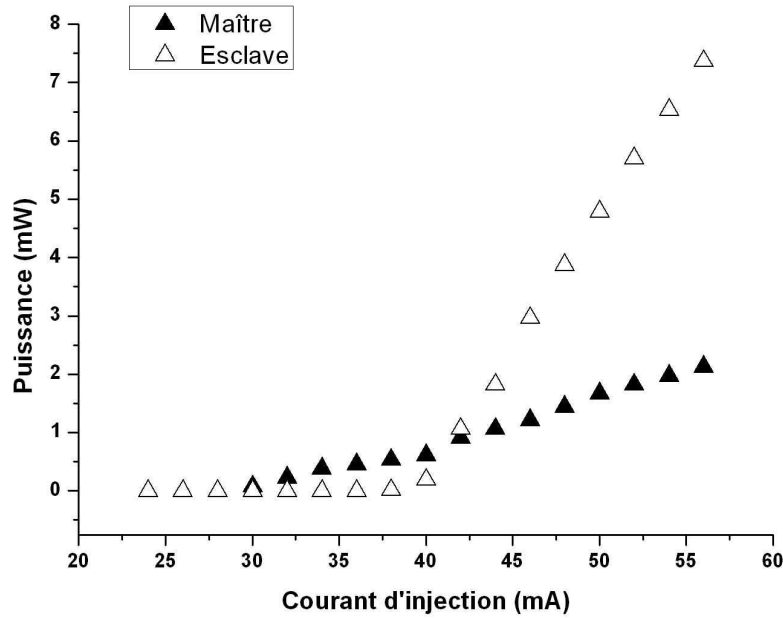


FIG. 4.11: Puissance d'émission du maître et de l'esclave.

En dessous du seuil les pertes sont plus importantes. À partir de cette valeur, toute la puissance est émise dans le faisceau laser. La pente qui caractérise le rendement de conversion courant-tension vaut 0.55 W/A pour le laser maître. Sur la figure 4.11, le seuil le plus bas correspond au laser maître. Cette diminution est due à la réduction des pertes assurée par la cavité externe.

Pour faire varier la longueur d'émission laser, on peut faire varier l'intensité du courant traversant la jonction ou faire varier la température. La longueur d'onde en fonction de l'intensité de courant pour différentes températures est obtenue pour les deux diodes esclaves. On remarque sur la figure 4.12 que ces diodes fonctionnent sur

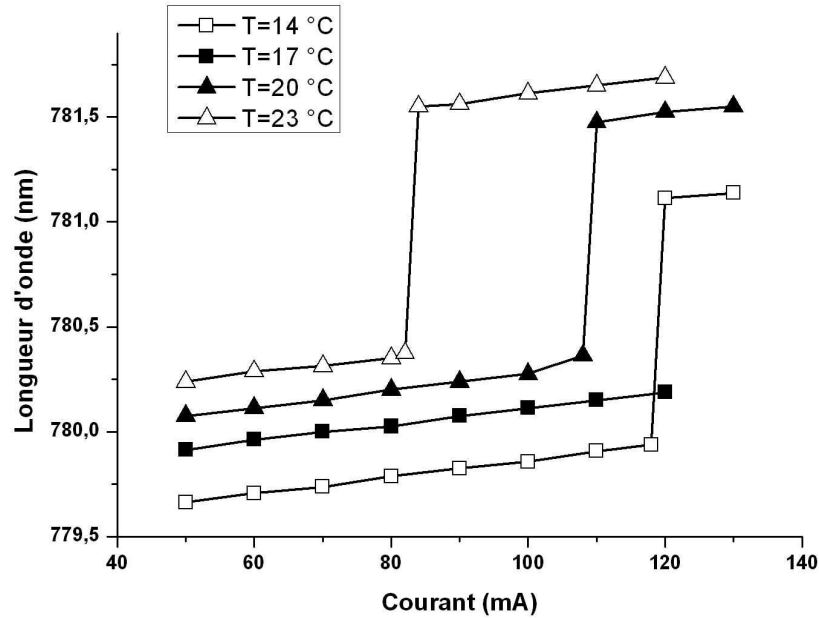


FIG. 4.12: Longueur d'onde d'émission en fonction de l'intensité de courant pour différentes valeurs de la température.

plusieurs modes.

Par ailleurs, des comportements multistables sont à mentionner. En effet, en diminuant progressivement la température de l'élément Peltier, on réalise en général un chemin retour stable et différent du chemin aller. En analysant les sauts de modes, on déduit que la pente est la même pour toutes les figures et que les sauts sont des multiples de 50 GHz, ce qui définit l'intervalle spectral libre ou l'espacement entre les modes. La longueur interne de la cavité L peut être déduite de l'expression $\Delta\nu = \frac{c}{2nL}$. Si l'on prend un indice de réfraction $n = 3.5$, $L \simeq 0.9$ mm.

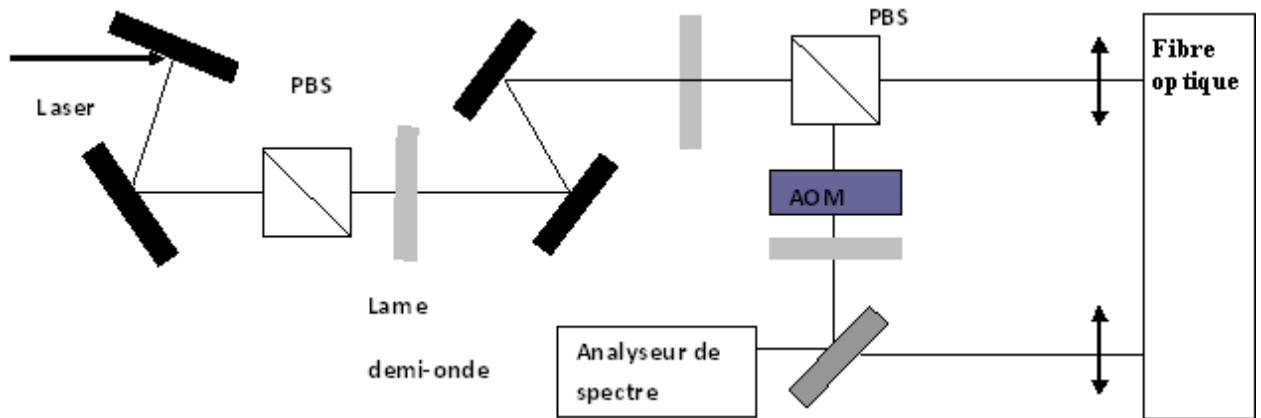


FIG. 4.13: Méthode d'hétérodynage pour la mesure de la largeur spectrale du faisceau esclave injecté.

Largeur à mi-hauteur du faisceau injecté

Pour mesurer la largeur du spectre d'émission laser, on a utilisé la méthode d'auto-hétérodynage. Celle-ci consiste à déterminer le bruit de phase par la détection d'un battement entre deux parties séparées du même faisceau. Le faisceau est divisé en deux parties à l'aide d'un cube séparateur de polarisations (PBS). On fait retarder l'un des faisceau en lui faisant parcourir 720 m de fibre optique, l'autre faisceau est décalé de 80 MHz de fréquence à l'aide d'un modulateur acousto-optique. L'ensemble est superposé sur un détecteur rapide suivi d'un amplificateur. Le battement à 80 MHz est observé sur un analyseur de spectre. Le schéma expérimental est reproduit sur la figure 4.13.

La différence est notable entre la largeur mesurée sur un faisceau en mode libre et un faisceau injecté par le maître (figure 4.14). La largeur du battement est directement liée à la largeur du spectre d'émission laser. La largeur du laser injecté est bien

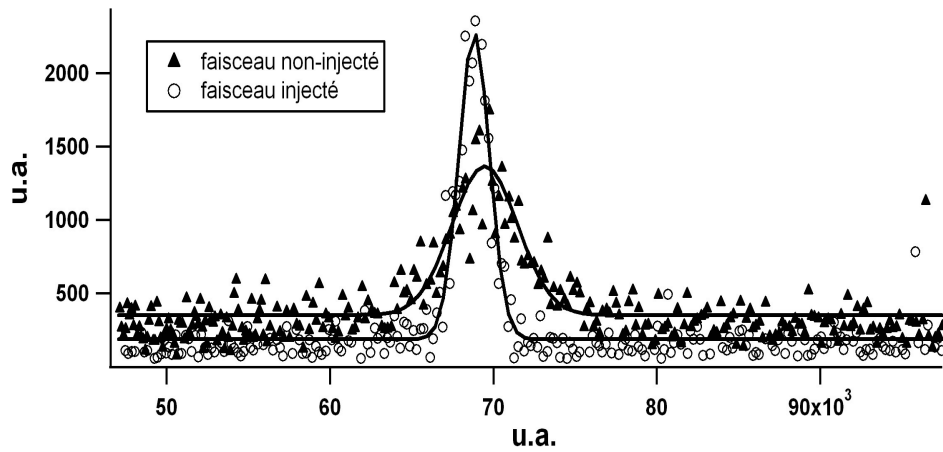


FIG. 4.14: Spéctre du battement obtenu dans les deux situations où la diode esclave est injectée et non-injectée .

inférieure à Γ , elle est de l'ordre du MHz.

Avant de refroidir et de piéger les atomes, il faut que la fréquence du laser soit au désaccord choisi et que l'intensité des faisceaux soit suffisante pour assurer un piégeage efficace. Pour cela, il faut mettre en place un dispositif fiable de contrôle de la fréquence et de l'intensité des faisceaux.

Contrôle de la fréquence et de l'intensité des faisceaux

Pour contrôler finement le désaccord, on utilise un Modulateur Acousto-Optique (AOM) modulé par un oscillateur radiofréquence. Par effet Doppler, les ordres +1 et -1 diffractés par le réseau de phase de l'AOM sont décalés en fréquence de $\pm\delta\nu$ que l'on peut choisir. Les modulateurs acousto-optiques disponibles acceptent des radiofréquences de 50 à 120 MHz, et c'est cette fréquence qui est utilisée dans le

montage de détection synchrone. Afin d'avoir des faisceaux désaccordés de -3Γ (soit $\frac{\delta_0}{2\pi} = 18$ MHz pour le rubidium⁴), on utilise une série de modulateurs acousto-optiques. L'utilisation de ces derniers dans un montage en oeil de chat est intéressante puisque on peut changer le désaccord sans modifier l'alignement des faisceaux. En fait, lorsque l'on change la fréquence de l'onde sonore dans le modulateurs acousto-optique, le pas du réseau de phase varie et la direction des ondes diffractées change. En faisant un aller retour dans l'AOM (montage en oeil de chat de la figure 4.4), la fréquence est décalée de $2\delta\nu$ et le faisceau revient sur lui même quelque soit l'angle de diffraction. Par ailleurs, le modulateur acousto-optique permet également de modifier l'intensité des faisceaux, puisque l'intensité du faisceau diffracté dépend de l'amplitude de l'onde radiofréquence qui génère le réseau de phase.

Une fois les sources laser prêtes, c'est à dire que le piège est sur la transition $5S_{1/2} (F=2) \rightarrow 5P_{3/2} (F=3)$ et le repompeur est sur la transition $5S_{1/2} (F=1) \rightarrow 5P_{3/2} (F=2)$, il reste à acheminer ces faisceaux sur la cellule où l'on réalise le refroidissement et le piègeage des atomes.

4.4 La table du piège

Une fois les faisceaux piège et repompeur mis en forme, ils sont séparés en trois bras pour former les paires de faisceaux $\sigma^+ - \sigma^-$ nécessaires au fonctionnement du piège, ils sont acheminés vers la table supérieure portant le piège (figure 4.15).

⁴Pour cette valeur du désaccord, on arrive à un piège stable.

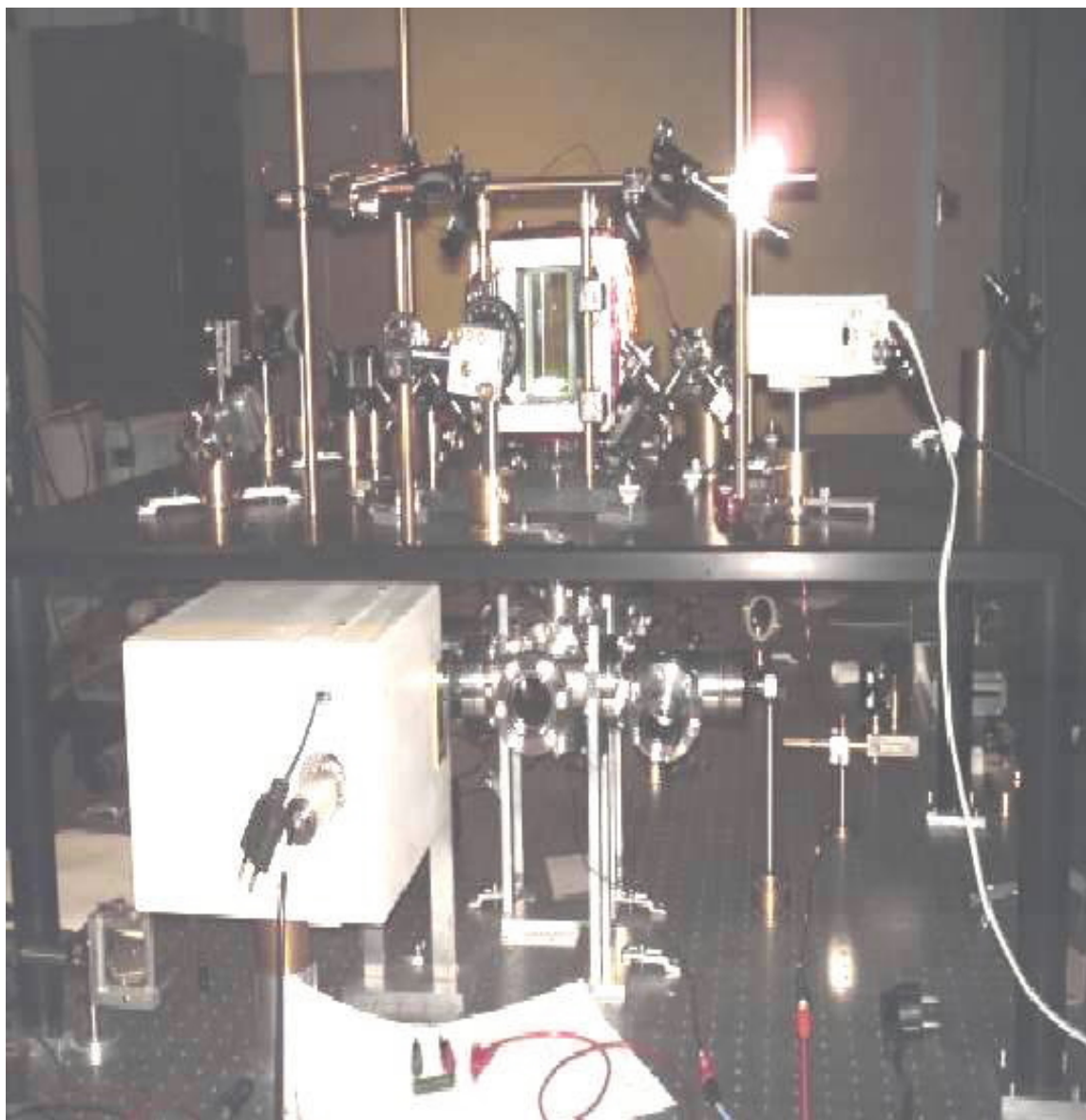


FIG. 4.15: Table de piège magnéto-optique.

Une des paires est alignée selon la direction du champ magnétique. Alors que les deux autres forment un angle de 45° avec la table du piège. Notons que six lames quart d'ondes sont utilisées pour rendre circulaires les polarisations des faisceaux. Les faisceaux de chaque paire ont des polarisations circulaires inverses l'une de l'autre.

En plus des faisceaux laser, l'autre ingrédient nécessaire à la réalisation du PMO est le champs magnétique quadripolaire. Il est produit par une paire de bobines parcourues par des courants en sens opposés (configuration anti-Helmoltz). Les spires sont carrées de côté $2a = 13$ cm, séparées d'une distance $D = 2d = 15$ cm et parcourues par un courant $I = 7$ A. On arrive à créer un champs magnétique nul au centre $z = 0$ et qui varie linéairement au voisinage. Le gradient au centre est donné par l'expression suivante :

$$b_z = 8 * 10^{-7} NI \frac{a^2 d (5a^2 + 3d^2)}{(a^2 + 2d^2)^{\frac{3}{2}} (a^2 + d^2)^2}. \quad (4.1)$$

La cellule en quartz contenant la vapeur atomique a la forme d'un parallélipède de dimension $5 \times 7.5 \times 10$ cm³. Elle est traitée anti-reflet sur ses faces externes.

Le chargement des atomes dans le PMO peut se faire de deux manières différentes. Soit par jet atomique ralenti par laser soit à partir d'une vapeur atomique. La première méthode nécessite la réalisation d'un four et d'un ralentisseur Zeeman. Elle est souvent nécessaire pour charger des atomes à faible pression de vapeur saturante. Le rubidium, au contraire, a une température de fusion plus faible ($39.31^\circ C$), il suffit d'utiliser une vapeur atomique pour le chargement. Cependant, il est toujours difficile de faire monter la vapeur à la cellule du piège. Il faudrait chauffer, par exemple à l'aide d'un

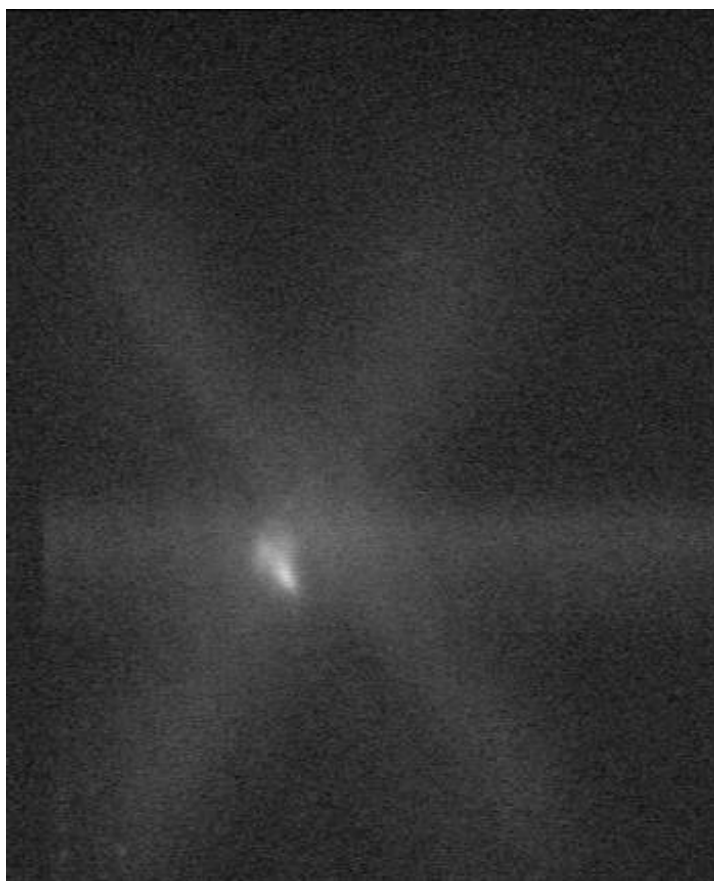


FIG. 4.16: Image de la fluorescence du PMO donnée par une caméra CCD.

décapeur, pour avoir une densité d'atomes raisonnable.

Pour faire sortir le rubidium, le rendre liquide puis avoir de la vapeur, il faut faire un vide primaire de l'ordre de 10^{-6} torr puis utiliser une pompe ionique pour entretenir un vide secondaire de l'ordre de 10^{-8} torr. En ouvrant légèrement une des vannes et en chauffant à 50°C , les atomes montent jusqu'à la cellule. Pour observer la fluorescence de la vapeur atomique, on utilise un faisceau laser en résonance.

Sur la figure 4.16, est représenté un nuage d'atomes froids obtenu pour un désaccord $\delta_0 = -3\Gamma$ et un gradient de champ magnétique $b = 13 \text{ G/cm}$. Le piège correspond à l'intersection des trois paires de la mélasse optique.

On peut connaître la distribution spatiale et le nombre d'atomes dans le nuage en analysant sa fluorescence. En effet, les atomes du nuage absorbent et émettent spontanément et de manière isotrope des photons. Une estimation du nombre d'atomes est possible en utilisant une photo-diode calibrée qui détecte des photons sous un angle solide $\Omega = \frac{S}{d^2}$. Si le nuage contient N atomes, le nombre de photons émis par unité de temps est $N\Pi_e\Gamma$. En partant de la définition de l'efficacité quantique α_{eq} de la photodiode :

$$\alpha_{eq} = \frac{V}{W} = \frac{4\pi}{\Omega} \frac{V}{N\Pi_e\Gamma\hbar\omega_0}. \quad (4.2)$$

où V est la tension indiquée par le passage de la puissance lumineuse W , le nombre d'atomes N est donné par :

$$N = \frac{4\pi}{\Omega} \frac{V}{\alpha_{eq}\Pi_e\Gamma\hbar\omega_0}. \quad (4.3)$$

Dans la suite, on présentera un modèle de PMO dans le contexte du refroidisse-

ment Doppler. On utilisera les équations de Bloch pour déterminer les populations atomiques ensuite l'équation de Fokker-Planck pour déterminer la densité dans l'espace de phases.

Chapitre 5

Le modèle et les résultats des simulations

5.1 Introduction

Dans le but de simplifier notre étude du piège, on se place dans la configuration simple d'un piège magnéto-optique unidimensionnel [29]. On choisit la structure Zeeman la plus simple qui conduit à un refroidissement par une force magnéto-optique, c'est à dire l'étude se fait sur la transition $J = 0 \rightarrow J = 1$. L'atome considéré dans ce cas a trois niveaux, le niveau fondamental $J = 0$ non-dégénéré de moment cinétique nul et les deux sous niveaux excités résultant de l'interaction de l'atome avec les deux faisceaux de la mélasse $\sigma^+ - \sigma^-$ et le champ magnétique quadripolaire B . La particularité d'une telle transition est que les phénomènes de type sysiphe sont interdits

ainsi que la redistribution des photons.

Afin de déterminer l'expression de la force magnéto-optique moyenne exercée par la paire de faisceaux laser sur un atome en présence du champ magnétique, on résout le système d'équations de Bloch optiques (EBO). Ces équations donnent l'évolution temporelle de la matrice densité avec la prise en compte de la relaxation par l'émission spontanée. De plus, le calcul de la force prendra en compte deux effets collectifs, l'effet d'ombre, effet essentiel à la compression du nuage, et l'effet de la diffusion multiple, interaction répulsive de longue portée s'opposant à la force de contraction du PMO.

5.2 Temps caractéristiques du système

On distingue dans le système atomes-photons les variables internes qui décrivent l'évolution des populations des niveaux ainsi que les cohérences entre eux (définissant les transitions entre le fondamental et les deux niveaux excités), et les variables externes qui décrivent la dynamique externe des atomes, par exemple, la position du centre de masse et sa vitesse.

L'échelle de temps d'évolution des degrés de liberté internes est $T_{int} = \Gamma^{-1}$, elle représente le temps de relaxation par émission spontanée, et celle des variables externes T_{ext} , qu'on peut définir raisonnablement comme la durée nécessaire pour que la vitesse de l'atome change notablement, mais qu'il n'est pas facile à évaluer. Pour cela, on admet le critère suivant : le changement de vitesse Δv est tel que la modification

de l'effet Doppler $k_l \Delta v$ dépasse la largeur naturelle Γ . Sachant que le changement de vitesse après chaque émission spontanée est égale à v_{recol} , et le temps moyen entre deux émissions spontanées est Γ^{-1} , on peut écrire :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta v}{T_{ext}} &= \frac{v_{recol}}{\Gamma^{-1}} \Rightarrow \frac{T_{ext}}{T_{int}} = \frac{T_{ext}}{\Gamma^{-1}} = \frac{\Delta v}{v_{recol}}, \\ \Rightarrow \frac{T_{ext}}{T_{int}} &= \frac{k_l \Delta v}{k_l v_{recol}} \simeq \frac{\Gamma}{k_l v_{recol}} = \frac{m\Gamma}{\hbar k_l^2}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Pour les atomes alcalins, l'inégalité $T_{int} \ll T_{ext}$ est largement vérifiée. C'est la condition de raie large. Le rapport $\frac{T_{ext}}{T_{int}}$ est de 790 pour le rubidium et de 400 pour le Sodium.

L'étude du système est considérablement simplifiée. La dynamique des variables internes, dans ce cas, est beaucoup plus rapide que la dynamique des variables externes. En d'autres termes, les variables externes suivent adiabatiquement les variables internes. Les deux dynamiques, interne et externe, sont ainsi découplées. Il est à noter également qu'il y a un troisième temps caractéristique, celui de l'évolution des intensités des faisceaux laser T_{laser} . Un temps beaucoup plus petit que les temps cités plus haut, il est de l'ordre de la nano seconde. Par conséquent, la résolution de l'équation de la densité dans l'espace des phases ne tiendra compte que des valeurs stationnaires des intensités.

La dynamique externe, quant à elle, va être étudiée classiquement. Pour que cette approximation soit valable, il faut, d'une part, que l'extension spatiale ΔR soit petite devant la longueur d'onde du champs lumineux ($\Delta R \ll \lambda$). Ceci se traduit en remplaçant dans l'expression du champ des lasers, l'opérateur position par sa valeur

moyenne. D'autre part, le déplacement Doppler $k_l \Delta V$ doit être de l'ordre de Γ . Les deux conditions ne sont compatibles, compte tenu de la relation d'incertitude, que si la condition de la raie large est vérifiée. En combinant les deux relations $\Delta R \ll \lambda$ et $k_l \Delta V \sim \Gamma$, dans la relation $\Delta R \Delta V \sim \frac{\hbar}{m}$:

$$\begin{aligned} \Delta R \Delta V &\sim \frac{\hbar}{m} \Rightarrow \frac{\hbar}{m} \ll \frac{\lambda \Gamma}{k_l} \\ &\Rightarrow \frac{m \Gamma}{\hbar k_l^2} \gg 1, \end{aligned} \quad (5.2)$$

on retrouve bien la condition de raie large.

5.3 Solutions stationnaires des équations de Bloch

Le système étudié est un système à trois niveaux, le fondamental $|g\rangle$, et les deux états excités $\{|e_-\rangle, |e_+\rangle\}$. Les deux faisceaux laser contra-propageants ont des fréquences identiques, des polarisations et des vecteurs d'onde opposés. On choisit \hat{z} , comme l'axe de propagation des faisceaux et l'axe des deux bobines. Le champ magnétique met en évidence la dégénérescence Zeeman, il introduit les trois sous-niveaux Zeeman de l'état excité $|e_0\rangle$ et $|e_{\pm}\rangle$. Selon les règles de sélection de transitions dipolaires $\Delta J = \pm 1$, le sous-niveau excité $|e_0\rangle$ n'est pas couplé aux champs laser ; le niveau fondamental a un moment cinétique $J_g=0$, et les lasers ont des polarisations circulaires $J_e = +1$. Les éléments de la matrice densité $\hat{\sigma}$ se déduisent de l'équation d'évolution de la matrice densité [64] :

$$\frac{d\hat{\sigma}}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}, \hat{\sigma}] + \left(\frac{d\hat{\sigma}}{dt} \right)_{relax}. \quad (5.3)$$

avec

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_I, \quad (5.4)$$

et $\left(\frac{d\hat{\sigma}}{dt}\right)_{relax}$ est le terme de relaxation par émission spontanée.

L'Hamiltonien sans interaction \hat{H}_0 a pour expression dans la base des vecteurs propres $|e_+\rangle$, $|e_-\rangle$ et $|g\rangle$ du système atome-rayonnement :

$$\hat{H}_0 = \hbar\omega_+ |e_+\rangle \langle e_+| + \hbar\omega_- |e_-\rangle \langle e_-| + 0 |g\rangle \langle g|, \quad (5.5)$$

où $\omega_{\pm} = \omega_0 \mp k_l v \mp \omega_B z$ avec $\omega_B = \frac{\mu_b}{\hbar}$. \hat{H}_I est l'Hamiltonien d'interaction Atome-Laser, qui dans le cadre de l'approximation dipolaire électrique se met sous la forme : $\hat{H}_I = -\mathbf{E}_l \cdot \hat{D}$, avec $\mathbf{E}_l = \mathbf{E}_{\sigma_-} + \mathbf{E}_{\sigma_+}$, le champ total des deux ondes laser. Il est considéré comme un champ classique externe. L'opérateur $\hat{D} = \hat{D}_{e_-} + \hat{D}_{e_+}$ est l'opérateur dipolaire électrique total. \hat{D}_{e_-} , \hat{D}_{e_+} sont associés aux transitions vers les deux sous-niveaux excités $|e_-\rangle$ et $|e_+\rangle$. Ces deux opérateurs se décomposent comme suit :

$$\hat{D}_{e_-} = \mathbf{d}_{+e_-} |e_-\rangle \langle g| + \mathbf{d}_{-e_-} |g\rangle \langle e_-| = \hat{D}_{+e_-} + \hat{D}_{-e_-}, \quad (5.6)$$

$$\hat{D}_{e_+} = \mathbf{d}_{+e_+} |e_+\rangle \langle g| + \mathbf{d}_{-e_+} |g\rangle \langle e_+| = \hat{D}_{+e_+} + \hat{D}_{-e_+}. \quad (5.7)$$

L'opérateur \hat{D}_{e_-} (respectivement \hat{D}_{e_+}) est responsable de l'absorption d'un photon σ_- (respectivement σ_+) par le biais de l'opérateur \hat{D}_{+e_-} (respectivement \hat{D}_{+e_+}) et de l'émission d'un photon du même type par le biais de l'opérateur \hat{D}_{-e_-} (respectivement \hat{D}_{-e_+}).

L'expression du champ de l'onde polarisée positivement se propageant selon les z

positifs s'écrit :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{\sigma^+}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{E_0}{2} [\hat{\mathbf{e}}_x \cos \alpha + \hat{\mathbf{e}}_y \sin(\alpha)] = \frac{E_0}{2} (-e^{i\alpha} \hat{\mathbf{e}}_- + e^{-i\alpha} \hat{\mathbf{e}}_+) \\ &= \mathbf{E}_{+e_+} e^{-i\alpha} + \mathbf{E}_{-e_+} e^{i\alpha},\end{aligned}\quad (5.8)$$

avec $\mathbf{E}_{+e_+} = \frac{E_0}{2} \hat{\mathbf{e}}_+$, $\mathbf{E}_{-e_+} = -\frac{E_0}{2} \hat{\mathbf{e}}_-$ et $\alpha = \omega_l t - k_l z$. De même, le champ de l'onde polarisée négativement se propageant selon les z négatifs s'écrit :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{\sigma^-}(\mathbf{r}, t) &= \frac{E_0}{2} [\hat{\mathbf{e}}_x \cos(\omega_l t + k_l z) - \hat{\mathbf{e}}_y \sin(\omega_l t + k_l z)] \\ &= \frac{E_0}{2} (e^{-i\alpha'} \hat{\mathbf{e}}_- - e^{i\alpha'} \hat{\mathbf{e}}_+) = \mathbf{E}_{+e_-} e^{-i\alpha'} + \mathbf{E}_{-e_-} e^{i\alpha'},\end{aligned}\quad (5.9)$$

avec $\mathbf{E}_{-e_-} = -\frac{E_0}{2} \hat{\mathbf{e}}_+$, $\mathbf{E}_{+e_-} = \frac{E_0}{2} \hat{\mathbf{e}}_-$ et $\alpha' = \omega_l t + k_l z$.

L'interaction atome-laser représentée par H_I est composée de deux parties : la première \hat{H}_{I1} , qui représente l'interaction de l'onde σ^+ avec le dipôle, s'écrit sous la forme :

$$\hat{H}_{I1} = -\hat{D}_{e_+} \cdot \mathbf{E}_{\sigma^+} = -\left(\hat{D}_{+e_+} + \hat{D}_{-e_+}\right) (\mathbf{E}_{+e_+} e^{-i\alpha} + \mathbf{E}_{-e_+} e^{i\alpha}). \quad (5.10)$$

Si l'on ne garde que les termes résonnants on obtient :

$$\begin{aligned}\hat{H}_{I1} &\cong -\hat{D}_{+e_+} \mathbf{E}_{+e_+} e^{-i\alpha} - \hat{D}_{-e_+} \mathbf{E}_{-e_+} e^{i\alpha} \\ &= \frac{\hbar\Omega_+^*}{2} |e+\rangle \langle g| e^{-i\omega_l t} + \frac{\hbar\Omega_+}{2} |g\rangle \langle e+| e^{i\omega_l t},\end{aligned}\quad (5.11)$$

avec $\hbar\Omega_+ = -(\mathbf{d}_{+e_+} \cdot \mathbf{E}_{+e_+}) e^{ik_l z}$.

La seconde partie \widehat{H}_{I2} , qui représente l'interaction de l'onde σ^- avec le dipôle, s'écrit :

$$\begin{aligned}\widehat{H}_{I2} &= -\widehat{D}_{e_-} \cdot \mathbf{E}_{\sigma^-} = -\left(\widehat{D}_{+e_-} + \widehat{D}_{-e_-}\right) \left(\mathbf{E}_{+e_-} e^{-i\alpha'} + \mathbf{E}_{-e_-} e^{i\alpha'}\right) \\ &= \frac{\hbar\Omega_-^*}{2} |e_-\rangle \langle g| e^{-i\omega_l t} + \frac{\hbar\Omega_-}{2} |g\rangle \langle e_-| e^{i\omega_l t},\end{aligned}\quad (5.12)$$

$$\hbar\Omega_- = -(\mathbf{d}_{+e_-} \cdot \mathbf{E}_{+e_-}) e^{ik_l z}$$

Il en résulte :

$$\begin{aligned}\widehat{H}_I &= \widehat{H}_{I1} + \widehat{H}_{I2} \\ &= -\widehat{D}_{+e_-} \mathbf{E}_{+e_-} e^{-i\alpha'} - \widehat{D}_{-e_-} \mathbf{E}_{-e_-} e^{i\alpha'} - \widehat{D}_{+e_+} \mathbf{E}_{+e_+} e^{-i\alpha} - \widehat{D}_{-e_+} \mathbf{E}_{-e_+} e^{i\alpha} \\ &= \frac{\hbar\Omega_-^*}{2} |e_-\rangle \langle g| e^{-i\omega_l t} + \frac{\hbar\Omega_-}{2} |g\rangle \langle e_-| e^{i\omega_l t} + \frac{\hbar\Omega_+^*}{2} |e_+\rangle \langle g| e^{-i\omega_l t} + \frac{\hbar\Omega_+}{2} |g\rangle \langle e_+| e^{i\omega_l t}.\end{aligned}\quad (5.13)$$

L'Hamiltonien \widehat{H} peut se mettre sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{\hbar\Omega_-}{2} e^{i\omega_l t} & \frac{\hbar\Omega_+}{2} e^{i\omega_l t} \\ \frac{\hbar\Omega_-^*}{2} e^{-i\omega_l t} & \omega_- & 0 \\ \frac{\hbar\Omega_+^*}{2} e^{-i\omega_l t} & 0 & \omega_+ \end{pmatrix}.\quad (5.14)$$

Son expression se simplifie dans le référentiel tournant $|\widetilde{e}_\pm\rangle$:

$$|\widetilde{e}_\pm\rangle = e^{i(\omega_l t)} |e_\pm\rangle \Rightarrow |e_\pm\rangle = e^{-i(\omega_l t)} |\widetilde{e}_\pm\rangle.\quad (5.15)$$

Dans cette nouvelle base, les éléments diagonaux sont déterminés par l'équation aux valeurs propres de Schrodinger :

$$\begin{aligned}i\hbar \frac{d}{dt} |\widetilde{e}_\pm\rangle &= i\hbar \left(e^{i(\omega_l t)} \frac{d}{dt} |e_\pm\rangle + i(\omega_l) e^{i(\omega_l t)} |e_\pm\rangle \right) \\ &= \hbar(\omega_\pm - \omega) e^{i(\omega_l t)} |e_\pm\rangle = \hbar(\omega_\pm - \omega_l) |\widetilde{e}_\pm\rangle.\end{aligned}\quad (5.16)$$

L'Hamiltonien du système devient :

$$\tilde{H} = \hbar \begin{pmatrix} 0 & \frac{\Omega_-}{2} & \frac{\Omega_+}{2} \\ \frac{\Omega_-^*}{2} & -\Delta_- & 0 \\ \frac{\Omega_+^*}{2} & 0 & -\Delta_+ \end{pmatrix}, \quad (5.17)$$

avec $\hbar(\Delta_{\pm}) = -\hbar(\omega_{\pm} - \omega_l)$

L'expression du terme de relaxation par émission spontanée, qui met en évidence l'interaction de l'atome avec les fluctuations du champ du vide, est donnée par [64] :

$$\left(\frac{d\sigma}{dt} \right)_{relax} = \begin{pmatrix} -\Gamma\sigma_{00} & -\frac{\Gamma}{2}\sigma_{0-} & -\frac{\Gamma}{2}\sigma_{0+} \\ -\frac{\Gamma}{2}\sigma_{-0} & -\Gamma\sigma_{--} & 0 \\ -\frac{\Gamma}{2}\sigma_{+0} & 0 & -\Gamma\sigma_{++} \end{pmatrix}. \quad (5.18)$$

En utilisant l'approximation adiabatique établie précédemment, on peut prendre les solutions stationnaires des équations de Bloch $d\sigma/dt = 0$:

$$\frac{d\hat{\sigma}}{dt} = \left[\tilde{H}, \hat{\sigma} \right] + \left(\frac{d\hat{\sigma}}{dt} \right)_{relax} = 0. \quad (5.19)$$

Avec la contrainte de conservation des populations :

$$\sigma_{00} + \sigma_{--} + \sigma_{++} = 1. \quad (5.20)$$

L'équation (5.19) est un système de neuf équations algébriques couplées. On arrive, après calcul, aux expressions des populations σ_{++} , σ_{--} des deux niveaux excités :

$$\sigma_{--} = \frac{i_- B}{2 A}; \quad (5.21)$$

$$\sigma_{++} = \frac{i_+ C}{2 A} \quad (5.22)$$

$$B = 4 + \frac{1}{4} (i_- + i_+)^2 + 2 (i_- + i_+) + 16 (\delta^2 + \delta_+) \\ - 8\delta i_+ (2\delta_+ - \delta_-) + 8\delta\delta_+ i_- + 64\delta_+ \delta^2$$

$$C = 4 + \frac{1}{4} (i_- + i_+)^2 + 2 (i_- + i_+) + 16 (\delta^2 + \delta_-) \\ + 8\delta i_- (2\delta_- - \delta_+) - 8\delta\delta_- i_+ + 64\delta_- \delta^2$$

$$A = \frac{1}{4} ((3 + i_- + i_+)^3 - 3 (i_- + i_+ + 9)) + 2i_- i_+ (\delta_- \delta_+ + 18\delta^2) \\ + 4 (1 + 4\delta_-) (1 + 4\delta_+) (1 + 4\delta^2) \\ + i_+ (\delta_+ - 8\delta\delta_-) i_- (\delta_- + 8\delta\delta_+) + \\ + 4i_- (4\delta_+ + 3\delta_- + 4\delta_+ - 8\delta_+ \delta_- - \delta_- \delta_+ + 4\delta_- \delta_+) \\ + 4i_+ (4\delta_- + 3\delta_+ + 4\delta_- - 8\delta_- \delta_+ - \delta_- \delta_+ + 4\delta_+ \delta_-),$$

avec $i_{\pm} = \frac{I_{\pm}}{I_{sat}} = 2 \left(\frac{\Omega_{\pm}}{\Gamma} \right)^2$: intensités des deux faisceaux laser, δ_0 : désaccord nu des lasers, $\delta_{\pm} = \delta_0 \mp \delta$: désaccords effectifs tels que $\delta = k_{\parallel} v + \omega_B z$ où $k_{\parallel} v$ est le terme Doppler et $\omega_B z$ le déplacement Zeeman.

Enfin on peut écrire l'expression de la force de pression de radiation en utilisant la relation de la force établie dans l'annexe B :

$$\mathbf{F}_{pr} = \hbar \mathbf{k}_l \Gamma (\sigma_{++} - \sigma_{--}). \quad (5.23)$$

\mathbf{F}_{pr} est la force que subit chaque atome dans la mélasse en présence du champ

magnétique. C'est une théorie à un seul atome. Dans un PMO, on doit considérer en plus de cette force, les effets collectifs qu'on ne peut pas négliger dans la configuration expérimentale utilisée. Afin de prendre en compte ces effets, il est indispensable de décrire le système par des équations de type Fokker-Planck.

5.4 Description du piège magnéto-optique et équation de Fokker-Planck

La dynamique des PMO dépend fortement des valeurs des paramètres employés : désaccord δ_0 , gradient de champ magnétique b et intensité des faisceaux pièges i_0 . Ces valeurs font apparaître différents régimes de fonctionnement. Selon la référence [65], on peut identifier quatre régimes :

a) Régime optiquement dense

Ce régime est caractérisé par un nombre d'atomes très élevé. L'approximation de faibles absorptions n'est plus valable. Dans ce cas, la description du PMO est compliquée.

b) Régime à deux composantes

Au fur et à mesure du chargement des atomes dans le PMO, deux régions se forment. L'une au centre, très dense, et l'autre à faible confinement enveloppe la région centrale. La température et la densité sont données par des mécanismes de type Doppler.

c) Régime de diffusion multiple

Le nombre d'atomes n'est pas suffisamment faible pour négliger les effets collectifs, l'effet d'ombre et la diffusion multiple. Dans ce régime, la densité ne croit pas avec le nombre d'atomes, mais c'est la taille du nuage qui augmente. Et c'est la compétition entre l'effet d'ombre et la diffusion multiple qui détermine cette taille.

d) Régime à faible nombre d'atomes

La densité est si faible que les effets collectifs peuvent être négligés. La taille du piège, dans ce cas, est déterminée par le théorème d'équipartition de l'énergie. La densité est par conséquent proportionnelle au nombre d'atomes N .

Il est à noter que la classification ci-dessus ne signifie pas que le passage d'un régime à l'autre se fait par une sorte de transition de phase, bien au contraire, les intervalles des paramètres sont très souvent superposés.

5.4.1 Effets collectifs

Effet du déséquilibre en intensité des faisceaux laser

Expérimentalement, le déséquilibre en intensité entre les faisceaux contrapropagants a pour origine des imperfections expérimentales. En effet, dans la situation où le faisceau retour est obtenu par réflexion du faisceau aller sur un miroir. Indépendamment de la présence du piège, il y a deux raisons pour lesquelles l'onde rétro-réfléchie soit moins intense que l'onde incidente : l'absorption par la vapeur chaude et les

perdes sur les fenêtres d'entrée de la cellule ainsi que celles sur les éléments optiques. Si on néglige l'absorption par ces derniers, soient la lame quart d'onde et le miroir, on considère principalement sur un aller-retour une perte égale à 3 fois la perte sur un élément optique. Cette perte peut généralement aller jusqu'à 15% de l'intensité d'entrée. Par conséquent, en plus de la force Doppler sur les atomes, la force totale doit tenir compte du déséquilibre en intensité entre les faisceaux aller et retour.

La force de déséquilibre dans le cas de faibles saturations s'écrit comme la différence entre les pressions de radiation des deux ondes aller et retour :

$$F_D = \frac{\Gamma}{2} \hbar k_l \left(\left(\frac{i_+}{1 + \left(\frac{2\delta_+}{\Gamma}\right)^2} - \frac{i_-}{1 + \left(\frac{2\delta_-}{\Gamma}\right)^2} \right) \right), \quad (5.24)$$

où $i_{\pm} = \frac{2\Omega_{\pm}^2}{\Gamma^2}$ sont les intensités par unité de I_{sat} .

Si on suppose que $\delta_+ \simeq \delta_- = \delta$, la force de déséquilibre se met sous la forme suivante :

$$F_D \simeq \frac{\Gamma}{2} \hbar k_l \left(\frac{i_+ - i_-}{1 + 4 \left(\frac{\delta}{\Gamma}\right)^2} \right). \quad (5.25)$$

Effet d'ombre

Cet effet a été étudié pour la première fois dans les mélasses optiques [66]. Ses deux principales conséquences sont : le déplacement du centre de masse du nuage et sa compression.

Le concept à la base de l'effet d'ombre est très simple. Soient deux atomes a et b soumis à un faisceau laser (figure 5.1).

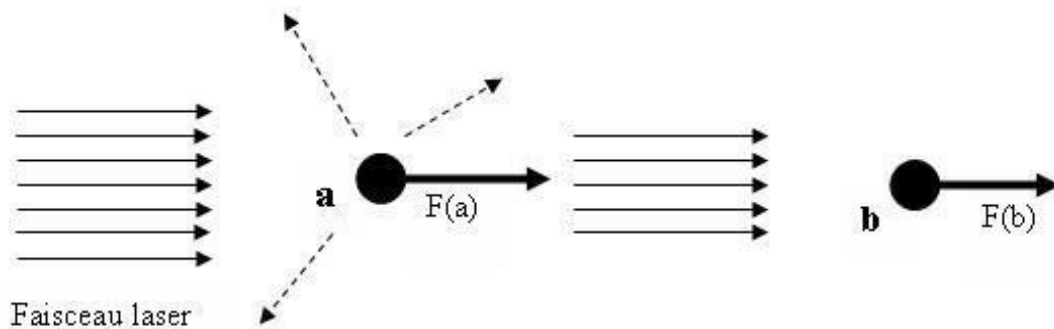


FIG. 5.1: Effet d'ombre : l'atome a fait ombre à l'atome b , par absorption, ce dernier ressent une intensité du laser inférieure à l'intensité ressentie par l'atome a .

L'atome a absorbe des photons et émet spontanément d'autres photons dans des directions aléatoires. L'atome b voit donc une intensité plus faible que l'atome a . Par conséquent, l'atome a subit une force de pression de radiation $F(a)$ plus grande que l'atome b , $F(a) > F(b)$. On dit souvent que l'atome a fait de l'ombre à l'atome b . On peut dire qu'il y a une force attractive entre les deux atomes, $F(a, b) = F(b) - F(a)$. Cette force a pour effet de comprimer le nuage.

Dans le cadre de l'hypothèse de faibles saturations, une première formulation de l'effet d'ombre a été faite sur des atomes à deux niveaux [49, 67]. On tient compte de l'effet d'ombre dans les équations en exprimant localement les population en z et en v . Effectivement, l'absorption locale crée un gradient local d'intensité qui est, lui-même, à l'origine de l'effet d'ombre.

La force magnéto-optique totale et qui tient compte de l'effet d'ombre est la résultante des forces de pression de radiation de chacune des ondes laser agissant sur

un atome en z et ayant une vitesse v .

$$F_{\text{mo}}(z, v) = \hbar k_l \Gamma (\sigma_{++}(z, v) - \sigma_{--}(z, v)), \quad (5.26)$$

où $\sigma_{++}(z, v)$ et $\sigma_{--}(z, v)$ sont les populations stationnaires des deux sous-niveaux excités, elles sont des fonctions des intensités i_{\pm} des deux faisceaux laser et des désaccords effectifs δ_{\pm} .

Diffusion multiple

L'effet de la diffusion multiple apparaît quand la densité du nuage est suffisamment élevée pour que la probabilité qu'un atome réabsorbe un photon émis par un autre atome devienne significative. Ce phénomène est aussi appelé effet d'emprisonnement de radiation. Il a été pris en compte pour la première fois par C. Wieman *et al.* [68]. La diffusion multiple est à l'origine des forces répulsives de longue portée qui expliquent réellement la taille observée expérimentalement des pièges magnéto-optiques.

La figure 5.2 schématise ce processus de répulsion. L'atome a diffuse des photons du laser, et l'atome b peut absorber des photons émis par l'atome a . Si tel est le cas, l'atome b recule par rapport à l'atome a lorsqu'il absorbe le photon diffusé. Et sa quantité de mouvement change de $\hbar k_l$. On adopte, pour le calcul de la force de diffusion multiple, la démarche de Sesko mais pour un piège unidimensionnel.

Considérons un plan infini d'épaisseur dz' perpendiculaire à l'axe des z . Un atome b à la position z sur cet axe ($\vec{r}(0, 0, z)$) subit une force $d\vec{F}_{\text{dm}}$ de diffusion multiple d'un ensemble d'atomes ρdV ($dV = dz' r' dr' d\phi dv'$) en $\vec{r}'(r', \phi', z')$:

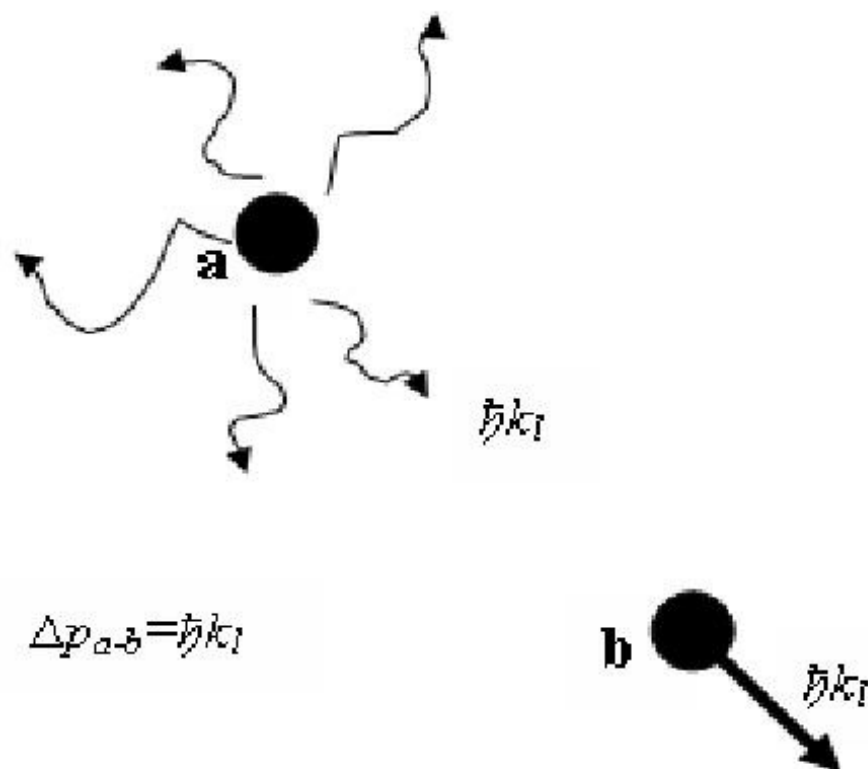


FIG. 5.2: Diffusion multiple

$$d\vec{F}_{\text{dm}} = \frac{\sigma_{\text{dm}}}{4\pi \left| \vec{r} - \vec{r}' \right|^2} \hbar k_l \Gamma \Pi_e \rho dV \vec{e}_r, \quad (5.27)$$

avec $\vec{e}_r = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{\left| \vec{r} - \vec{r}' \right|}$, σ_{dm} la section efficace de diffusion multiple¹ et Π_e la population du niveau excité et dV l'élément de volume dans l'espace des phase.

Après intégration et utilisation des éléments de symétrie, la force de diffusion multiple s'écrit :

$$F_{dm}(z, v, t) = \frac{\hbar \Gamma k_l}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dz' \int_0^{+\infty} dv' \Pi_e(z', v') \sigma_{\text{dm}} \rho(z', v', t) \varepsilon(z - z'), \quad (5.28)$$

où ε est la fonction signe.

5.4.2 Equation de Fokker-Planck

Historiquement, l'équation Fokker Planck a été utilisée pour la première fois par Fokker [69] et Planck [70] pour décrire le mouvement Brownien. Cette équation est largement utilisée dans plusieurs applications, comme par exemple dans la description des propriétés statistiques des lasers ou encore le mouvement Brownien dans des potentiels périodiques tels que le pendule, le conducteur superionique, la rotation de dipôles dans un champ constant et la jonction de Josephson. On commence par rappeler l'essentiel de la théorie du mouvement Brownien.

¹Cette section efficace dépend d'une manière générale des positions, des vitesses des atomes émetteurs et absorbants. De plus, on ne considère que la réabsorption des photons émis une seule fois.

La théorie du mouvement Brownien a permis de décrire l'évolution temporelle de la fonction de distribution des vitesses atomiques. Dans ce cas, la seule variable à considérer est la coordonnée de vitesse.

Une particule de masse m et de vitesse v immergée dans un fluide subit une force de friction de la forme $F_{friction} = -\alpha v$. En l'absence de force additionnelle l'équation de mouvement de la particule s'écrit sous la forme :

$$m\dot{v} + \alpha v = 0. \quad (5.29)$$

La solution de cette équation différentielle est : $v(t) = v(0)e^{-t/\tau}$, avec $\tau = \frac{m}{\alpha}$ le temps de relaxation de la variable vitesse. Selon cette solution, la vitesse de la particule est communiquée aux molécules du fluide et décroît jusqu'à s'annuler. En fait, l'équation (5.29) n'est valable que si la masse est assez grande pour négliger la vitesse due aux fluctuations thermiques. D'après le théorème d'équipartition de l'énergie : $\frac{1}{2}m \langle v \rangle^2 = \frac{1}{2}k_B T$, où k_B est la constante de Boltzman et T la température du fluide. L'équation (5.29) doit donc être modifiée afin de tenir compte de l'énergie thermique. La prise en compte de la force fluctuante de Langevin F_{fluct} dans l'équation (5.29) comble cette lacune. L'équation de mouvement devient :

$$m\dot{v} + \alpha v = F_{fluct}. \quad (5.30)$$

C'est une équation différentielle stochastique. La force F_{fluct} est caractérisée par une moyenne temporelle nulle $\langle F_{fluct} \rangle = 0$ et une fonction de corrélation $\langle F_{fluct}(t)F_{fluct}(t') \rangle = \frac{2\alpha}{m}k_B T \delta(t-t') = 2D_v \delta(t-t')$. D_v est le coefficient de diffusion en vitesse et les temps

t et t' sont tels que $|t' - t| \geq \tau_0$ (τ_0 est appelé temps de corrélation, cela peut être la durée typique d'une collision).

Dans le cadre du refroidissement radiatif où la force agissant sur l'atome ne dépend pas de la position et pour un atome ayant une vitesse v_z le long de l'axe oz , on peut écrire la même équation de Langevin puisque la force Doppler est une force de friction qui se met sous la forme $-\alpha v$. Dans ce cas, $\tau_0 = \Gamma^{-1}$ est le temps d'un cycle de fluorescence, celui-ci est, selon la séparation des échelles établie plus haut, nettement plus court que τ le temps de relaxation de la vitesse.

On décrit maintenant notre système physique avec la densité de probabilité ρ qui est aussi la fonction de distribution du système². La probabilité de trouver la vitesse entre les valeurs v et $v + dv$, sachant que la vitesse est une variable continue, est ρdv . L'équation Fokker Planck dans sa forme la plus simple s'écrit [71] :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial (\alpha \rho)}{\partial v} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} (D_v \rho). \quad (5.31)$$

La solution stationnaire de (5.31) est une Gaussienne dont la largeur à mi-hauteur définit bien la température du milieu :

$$\rho_{\text{stat}}(v) = \text{cte} \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right) = \text{cte} \exp\left(-\frac{\alpha v^2}{2D_v}\right). \quad (5.32)$$

La description de la dynamique des atomes dans un piège magnéto-optique nécessite de prendre en compte en plus des vitesses leurs positions respectives. On

²Le traitement stochastique utilisant l'équation Fokker-Planck est équivalent à celui des équations de Langevin en faisant un choix des forces fluctuantes. La dérivation de l'équation Fokker-Planck à partir des équations de Langevin a été détaillée dans [71].

s'intéresse donc à une description locale en vitesse et en position de l'état atomique.

Dans un PMO, les atomes sont soumis à un puit de potentiel optique.

La fonction de distribution du système dans l'espace des phases vérifie l'équation Fokker-Planck :

$$\frac{d}{dt}\rho = \frac{\partial\rho}{\partial t} + v\frac{\partial\rho}{\partial z} + \frac{\partial\left(\frac{F}{m}\rho\right)}{\partial v} = -\frac{\rho}{\tau} + \Lambda + \frac{\partial^2}{\partial v^2}(D_v\rho), \quad (5.33)$$

où le terme source Λ exprime l'apport des atomes dans le piège, τ la durée de vie du piège et F la force totale. Cette dernière comprend les deux effets collectifs, l'effet d'ombre et celui de la diffusion multiple.

Dans notre étude, on procède à quelques approximations simplificatrices. On suppose, en premier lieu, que la distribution transverse des vitesses est une distribution de Dirac en $v_{\perp} = 0$. En conséquence, la température qu'on évoquera plus loin correspondra à la température sur l'axe z .

On considère, en second lieu, une invariance par translation dans le plan transverse, par conséquent ρ ne dépendra que de la coordonnée z de l'axe des bobines. Le nombre d'atomes se déduit par intégration sur les trois coordonnées de l'espace et sur la vitesse v de l'axe z , la dimension de ρ est en $L^{-3}v^{-1}$. Finalement, on définit, une densité qui dépend d'une coordonnée spatiale z et d'une coordonnée de vitesse v .

Les termes source, relaxation et de diffusion

Le terme relaxation $-\frac{\rho}{\tau}$ tient compte de la perte des atomes du piège sous l'effet des collisions avec les atomes chauds (atomes non piégés) de la cellule.

L'écriture du terme source d'atomes dans le PMO $\Lambda(z, v)$ dépend du modèle de remplissage adopté. Si nous poursuivons la démarche décrite dans [67], les atomes capturés entre les instants t et $t + dt$ sont ceux qui sont entrés dans la région délimitée par les faisceaux laser (zone de capture) et ayant des vitesses inférieures à la vitesse de capture v_c . $\Lambda(z, v)$ peut être approchée par l'expression :

$$\Lambda(z, v) = \alpha \frac{n_{chaud}}{v_c} \left(\frac{v_c}{u_{chaud}} \right)^3, \quad (5.34)$$

n_{chaud} étant la densité d'atomes chauds et u_{chaud} la vitesse quadratique moyenne des atomes chauds.

Pour un nuage d'atomes, on a : $n_{chaud} \sim 10^7 \text{at/cm}^3$, $\frac{v_c}{u_{chaud}} \sim 10^{-2}$, $\alpha \sim \frac{10^5}{v_c}$ et $\Lambda \sim 10^{12} m^{-4}$.

Le terme $\frac{\partial^2}{\partial v^2} (D_v \rho)$ décrit la diffusion en vitesses. Il permet de déterminer la distribution des vitesses dans le piège et par conséquent la température. Pour évaluer le coefficient D_v , on ne considère que la diffusion liée à l'émission spontanée. Cette contribution est donnée par l'expression [64] :

$$D_v(z, v) = \frac{1}{2} \left(\frac{\hbar k_l}{m} \right)^2 \Gamma_{eff} = \frac{1}{2} \left(\frac{\hbar k_l}{m} \right)^2 \Gamma (\sigma_{++}(z, v) + \sigma_{--}(z, v)). \quad (5.35)$$

5.4.3 Equations des intensités

L'intensité de chacun des faisceaux décroît avec l'absorption des photons par la vapeur atomique. Sachant que $\Gamma\sigma_{\pm\pm}$ est le nombre de photons polarisés respectivement σ_{\pm} absorbés par unité de temps, les intensités des laser peuvent être déduites par intégration à partir des équations de propagations suivantes :

$$\begin{aligned} d_1 \frac{\partial i_1}{\partial t} + \frac{\partial i_1}{\partial z} &= \frac{\hbar\omega_l\Gamma}{I_{sat}} \int_{-v_{max}}^{v_{max}} dv \rho \sigma_{--}(z, v); \\ d_2 \frac{\partial i_2}{\partial t} + \frac{\partial i_2}{\partial z} &= -\frac{\hbar\omega_l\Gamma}{I_{sat}} \int_{-v_{max}}^{v_{max}} dv \rho \sigma_{++}(z, v). \end{aligned} \quad (5.36)$$

L'évolution des intensités des lasers est plus rapide que l'évolution des variables atomiques. Ceci signifie qu'on pourrait prendre nulle la dérivée par rapport au temps des intensités. Les expressions de $\sigma_{++}(z, v)$ et $\sigma_{--}(z, v)$ sont données par les équations (5.21) et (5.22). Finalement, le système d'équations (5.36) devient:

$$\begin{aligned} \frac{di_1}{dz} &= \frac{\hbar\omega_l\Gamma}{I_{sat}} \int_{-v_{max}}^{v_{max}} dv \rho \sigma_{--}(z, v); \\ \frac{di_2}{dz} &= -\frac{\hbar\omega_l\Gamma}{I_{sat}} \int_{-v_{max}}^{v_{max}} dv \rho \sigma_{++}(z, v). \end{aligned} \quad (5.37)$$

Les équations (5.37) seront couplées à l'équation de Fokker Planck (5.33) afin de constituer notre modèle de piège. Celui-ci sera exploité pour étudier les effets de la saturation et de la diffusion multiple sur le refroidissement et le piégeage des atomes.

Le modèle présenté plus haut est un modèle local de piège magnéto-optique. Il permet de décrire l'évolution d'un atome de transition $J = 0 \rightarrow J = 1$ dans un piège où les faisceaux pouvant être soit rétro-réfléchis soit indépendants. L'écriture locale

en vitesse et en position de la force agissant sur ce type d'atomes nous permet de décrire localement le PMO dans le cadre du refroidissement Doppler.

On se propose dans ce qui suit d'étudier l'effet de la saturation et celui de la diffusion multiple sur le refroidissement et le piégeage des atomes. En premier lieu, l'étude sera faite en négligeant la contribution de la force due à la diffusion multiple. En deuxième lieu, elle est consacrée à l'effet de la diffusion multiple sur la taille du piège ainsi que la densité atomique.

5.5 Résultats des simulations et discussions

L'espace des phases est délimité par le waist des faisceaux transverses w et la vitesse maximale capturée $v_c = \frac{\delta_0}{k_l}$. Chaque point de cet espace est repéré par deux coordonnées la position z de l'atome et sa vitesse v sur l'axe des bobines.

5.5.1 Effets de la saturation

Dans le calcul de la force magnéto-optique, certaines approximations sont indispensables : la première consiste à considérer un modèle d'atomes à deux niveaux et la deuxième à considérer une faible saturation $i_0 \ll 1$. Le calcul se simplifie notablement, les coefficients de friction et de rappel se déduisent facilement [60, 72]. Dans notre contexte, la transition atomique est saturée et la détermination de la contribution de chacune des ondes à la force totale doit être connue exactement. C'est la

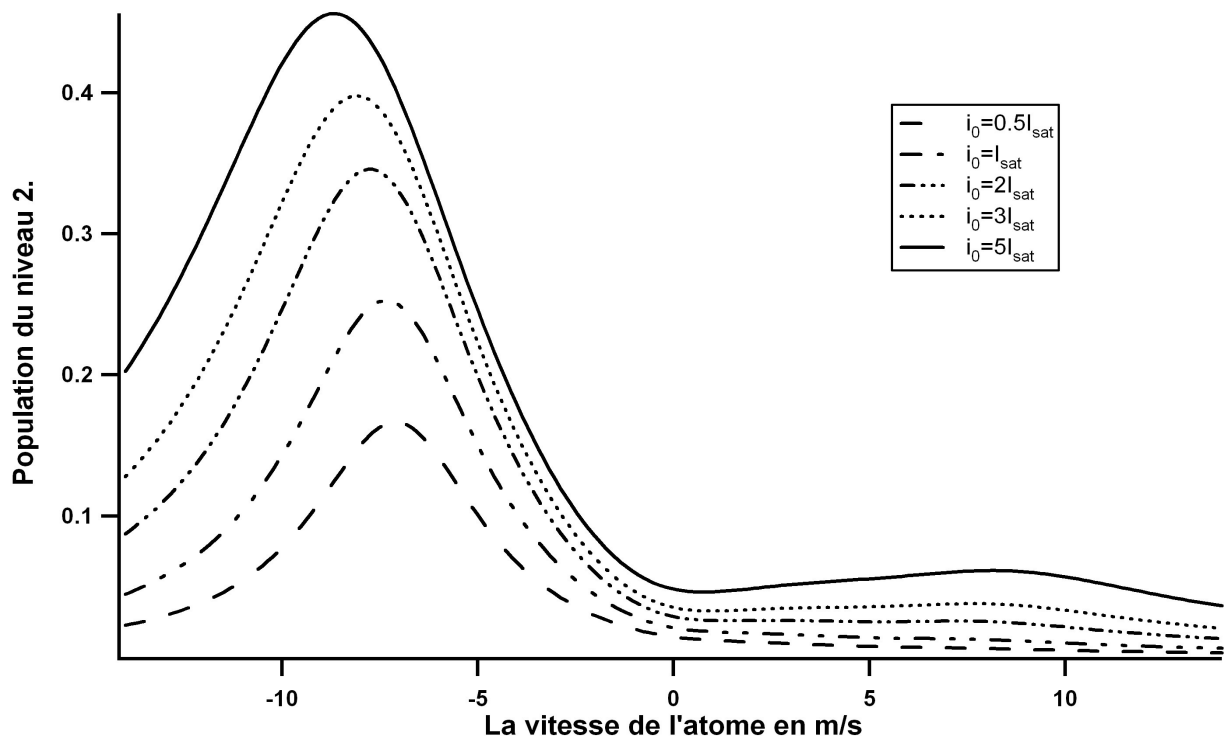


FIG. 5.3: Population du niveau excité "+" en fonction de la vitesse de l'atome pour différentes valeurs de l'intensité des lasers.

raison pour laquelle nous avons calculé exactement les populations des niveaux sans passer par ces deux approximations.

Effet de la saturation sur la largeur des niveaux excités

Afin d'évaluer l'effet de la saturation sur l'élargissement des niveaux excités, on trace la force de pression de radiation en fonction de la vitesse v des atomes pour plusieurs valeurs de l'intensité i_0 au centre du piège $z = 0$ et on la compare à la force Doppler exercée sur des atomes à deux niveaux à faibles saturations.

En remplaçant l'intensité i_{\pm} des deux ondes laser contra-propageantes par $2 \frac{\Omega_{\pm}^2}{\Gamma^2}$,

l'expression (5.24) peut être réécrite sous la forme :

$$F = \frac{a_0}{2} \left(\frac{\Omega_+^2}{2((\delta_0 - k_l v)^2 + \frac{\Gamma^2}{4})} - \frac{\Omega_-^2}{2((\delta_0 + k_l v)^2 + \frac{\Gamma^2}{4})} \right), \quad (5.38)$$

où les deux lorentziennes de demi-largeur $\frac{\Gamma}{2}$ correspondent aux termes de forces dues aux deux ondes laser de la mélasse et $\frac{\Gamma}{2}$ coincide avec la largeur du niveau excité.

En augmentant l'intensité des lasers, les lorentziennes deviennent de plus en plus larges. La largeur des niveaux peut être calculée à partir des largeurs des lorentziennes, chacune d'elles correspond à une des populations du niveau excité. La figure 5.3 représente la population $\Pi_+ = \sigma_{++}$ du niveau $|e_+\rangle$ pour différentes valeurs de l'intensité i_0 . La lorentzienne a bien une largeur Γ' qui augmente avec l'intensité. A partir de cette figure, on relève la largeur de chacune des lorentziennes. La figure 5.4 représente cette largeur en fonction de l'intensité i_0 .

L'effet de la saturation sur la largeur des niveaux excités peut être illustré directement en analysant la figure de la force subie par les atomes en fonction de la vitesse. A faibles intensités la force ressentie par les atomes au centre est composée de deux lorentziennes centrées en $v = \pm \frac{\delta_0}{2k_l}$ et de largeur Γ , la largeur naturelle des niveaux excités. Avec les paramètres suivants $\delta_0 = -1.5$, $B = 10$ G/cm et $i_0 = 0.3 I_{sat}$, on obtient la courbe en pointillets de la figure 5.5. Sur la même figure, en trait plein, l'allure de la force à haute saturation $i_0 = 10 I_{sat}$ dévoile un élargissement des lorentziennes d'une part et d'autre part un décalage supplémentaire de celles-ci.

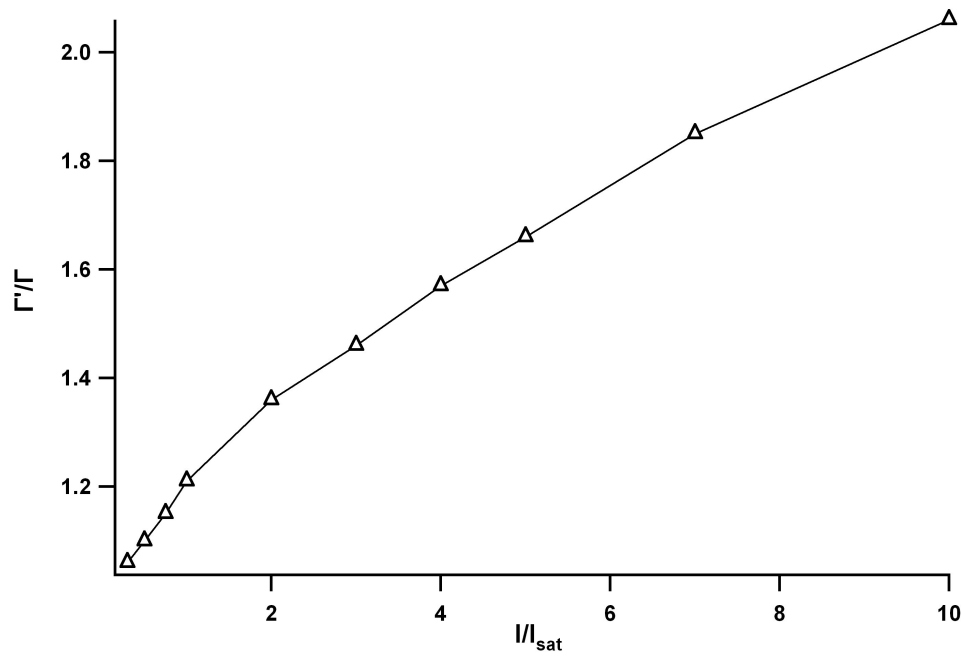


FIG. 5.4: Largeur du niveau excité en fonction de l'intensité.

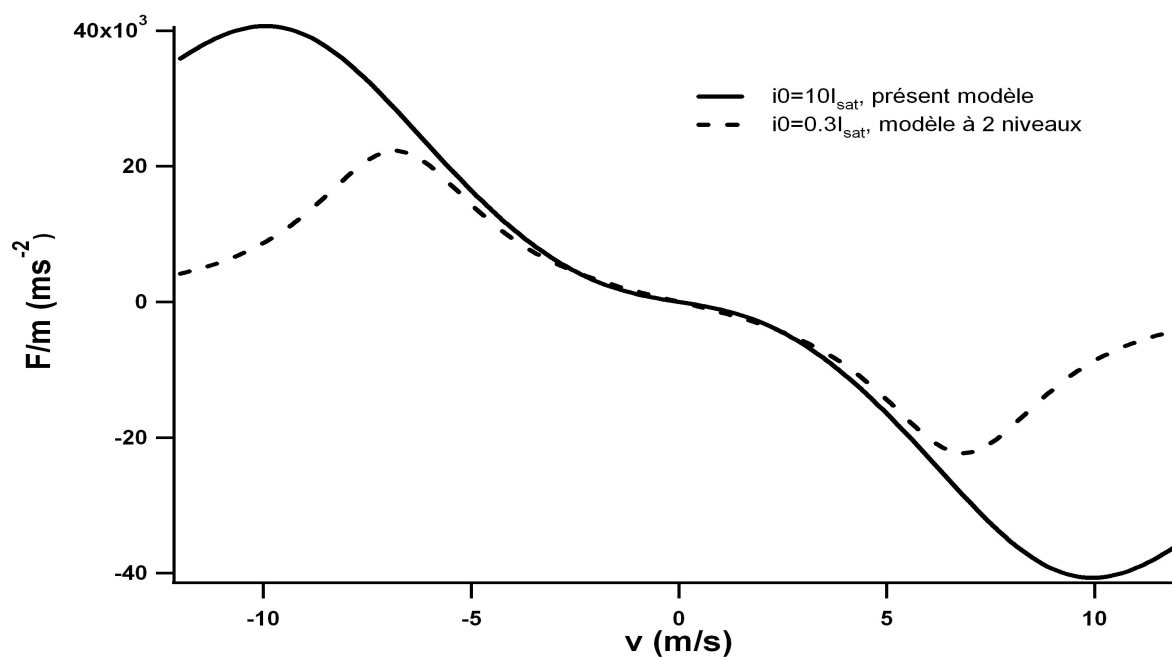


FIG. 5.5: Accélération des atomes au centre $z = 0$ en fonction de la vitesse. La courbe en trait continu représente la solution donnée par notre modèle à forte saturation, tandis qu'en trait discontinu, on représente la solution à faibles saturations pour des atomes à deux niveaux.

Effet de la saturation sur la température et sur la densité d'atomes

Avant de discuter les effets de la saturation sur le refroidissement et sur le piégeage, rappelons la définition adoptée de la température. En physique statistique, le théorème de l'équipartition de l'énergie relie l'énergie cinétique moyenne d'un atome à la température. L'énergie thermique moyenne par degré de liberté est égale à $\frac{1}{2}k_B T$ d'où $\frac{1}{2}mu^2 = \frac{3}{2}k_B T$ avec u la vitesse quadratique moyenne des atomes du gaz. La température d'un gaz d'atomes est donc définie à partir de la largeur à mi-hauteur de la distribution des vitesses des atomes de la vapeur. La température T correspond donc à la température unidimensionnelle reliée à la vitesse quadratique moyenne par $\frac{k_B T}{m} = u^2$, où u est la demi-largeur à mi-hauteur de la distribution des vitesses des atomes.

Pour illustrer l'effet de la saturation sur le refroidissement, nous avons étudié la température calculée par le modèle proposé et on l'a comparé à celle obtenue expérimentalement dans une mélasse 1D [73]. En utilisant la théorie Doppler, on a tenté d'expliquer les comportements observés. On se propose de comparer nos résultats établis sur des transitions $J = 0 \rightarrow J = 1$ où les trois niveaux des atomes sont dûs à la présence du champ magnétique à ceux obtenus dans [74] où les auteurs ont utilisé des atomes à deux niveaux puisque la dégénérescence Zeeman n'est pas considérée.

Les simulations sont faites sur l'atome de sodium avec les valeurs de paramètres suivantes : le désaccord $\delta_0 = -2.1\Gamma$ et le gradient de champ magnétique $b = 10 \text{ G/cm}$. La figure 5.6.b représente la température T donnée par ce modèle en fonction de

l'intensité i_0 . On observe bien un effet de chauffage dû à la saturation, puisque à partir de $i_0 = 6 \text{ mW/cm}^2$, T augmente significativement. Ce même phénomène a déjà été observé par ailleurs [75, 76]. Il est même visible sur la figure 5.6.a à faibles valeurs de l'intensité.

Il est vrai que les résultats du modèle (en cercles pleins) approchent mieux les valeurs expérimentales que la courbe théorique obtenue avec l'approximation de faibles saturations (en trait plein). Néanmoins, la pente de la courbe expérimentale ne peut être retrouvée, puisque notre modèle prédit une température constante à faibles valeurs de i_0 au lieu d'une évolution quasi-linéaire. Cela semble évident, car dans ce modèle nous avons négligé les effets sub-Doppler qui se manifestent considérablement dans le régime de faibles saturations.

Par ailleurs, pour montrer l'effet de la saturation sur le piégeage des atomes, on a calculé les solutions stationnaires de la densité spatiale pour différentes valeurs de i_0 (figure 5.7). Celle-ci est déduite par intégration de la densité $\rho(z, v)$ sur la vitesse v . A partir de ces solutions, on déduit à la fois la taille du piège et la densité maximale atteinte à différentes valeurs de l'intensité. Les résultats sont rassemblés sur la figure 5.8. On note que la taille du PMO se réduit avec l'augmentation de l'intensité jusqu'à $i_0 = 2 I_{sat}$, elle prend une allure constante puis augmente à très fortes saturations. En revanche, nous remarquons que la densité maximale augmente puis se stabilise ensuite diminue quand $i_0 \geq 4 I_{sat}$.

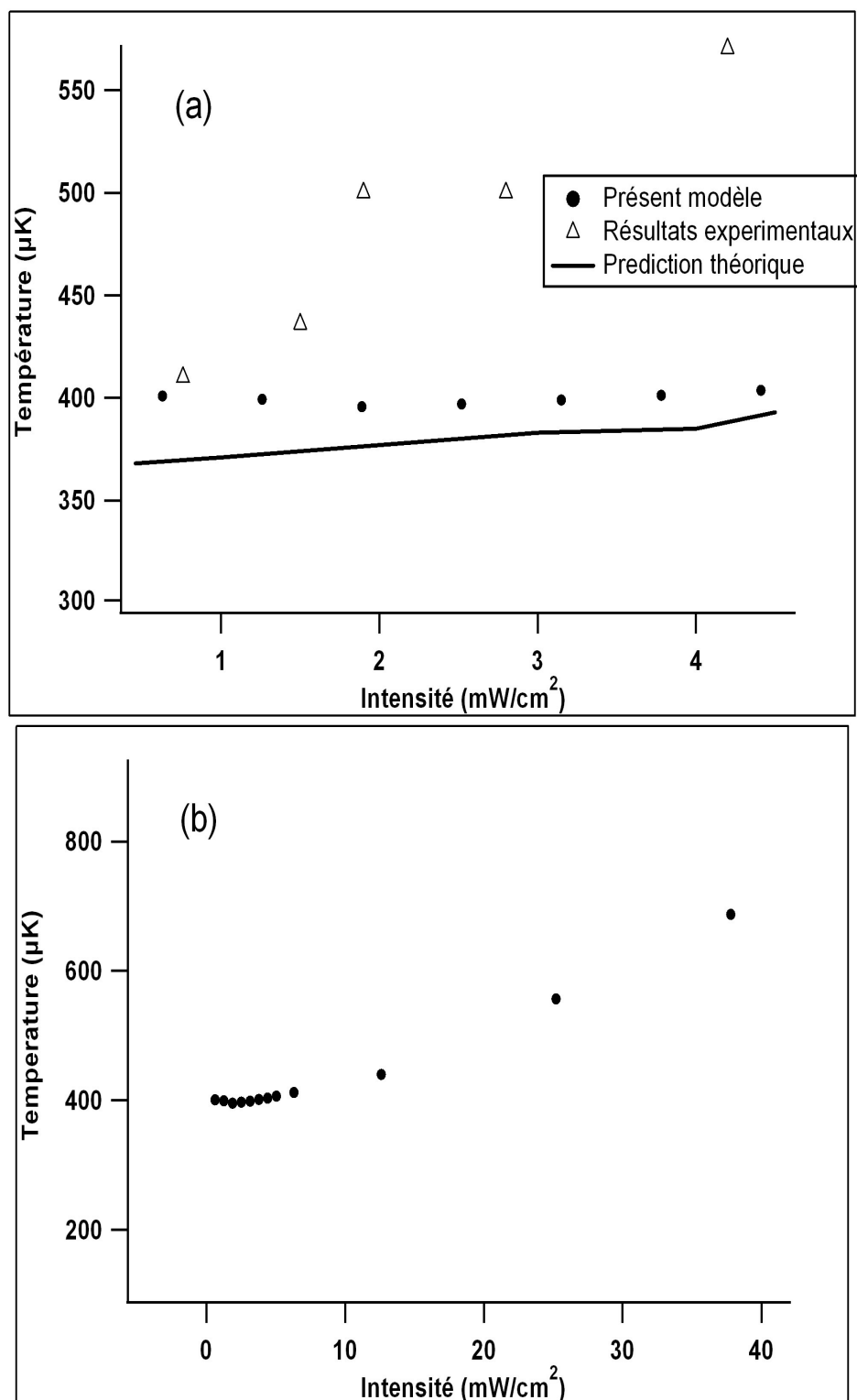


FIG. 5.6: Température du piège en fonction de l'intensité i_0 . (a) Donnée par le présent modèle à faibles intensités, les points expérimentaux ainsi que la courbe prédite théoriquement. (b) Donnée par le présent modèle à fortes intensités.

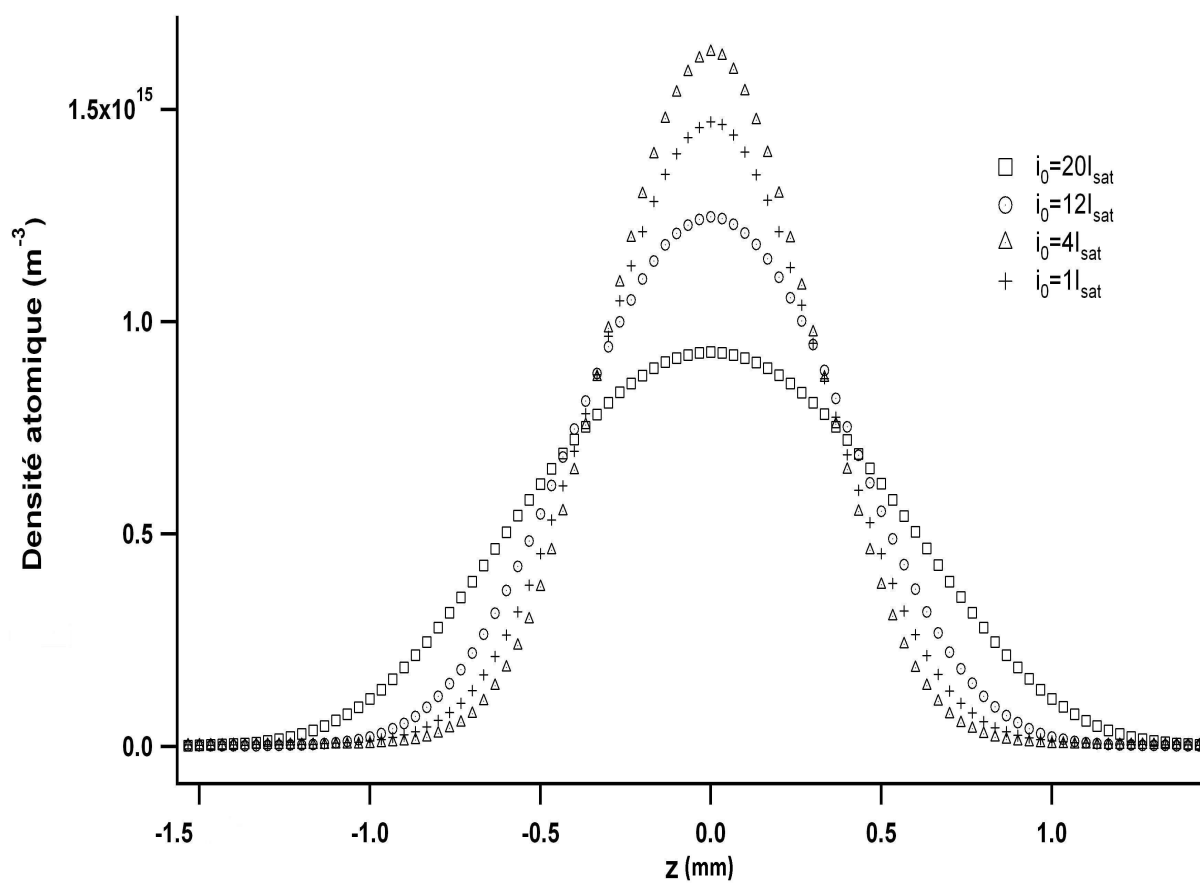


FIG. 5.7: Densité spatiale d'atomes piégés pour différentes valeurs de l'intensité.

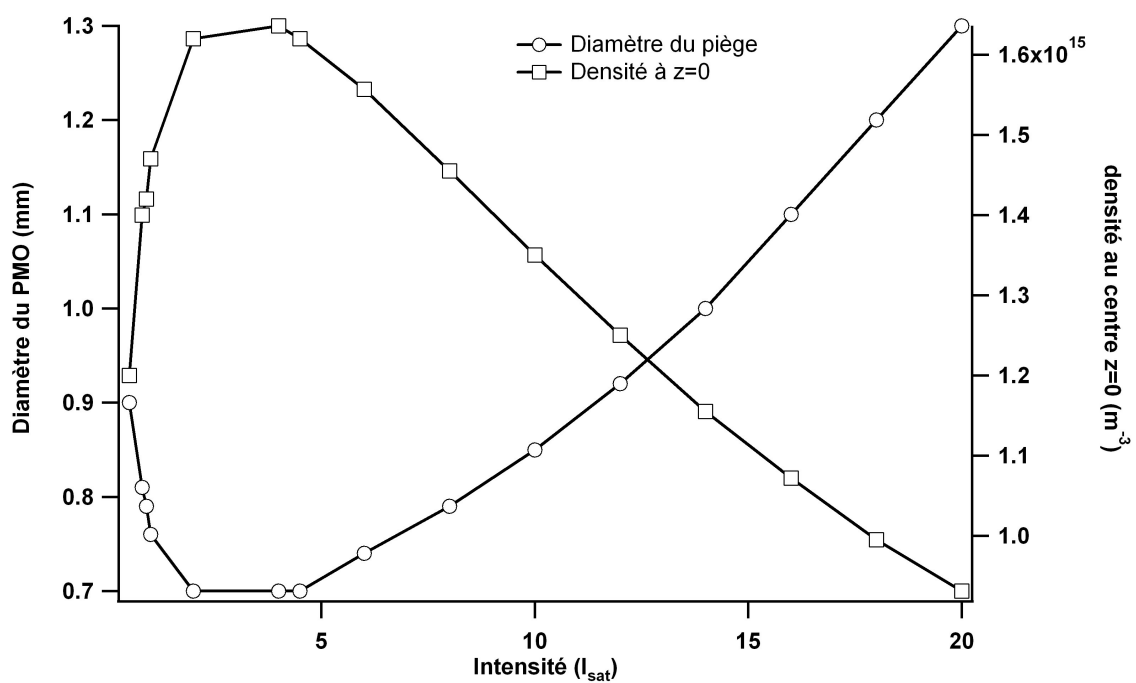


FIG. 5.8: Densité spatiale maximale des atomes et taille du piège en fonction de l'intensité i_0 .

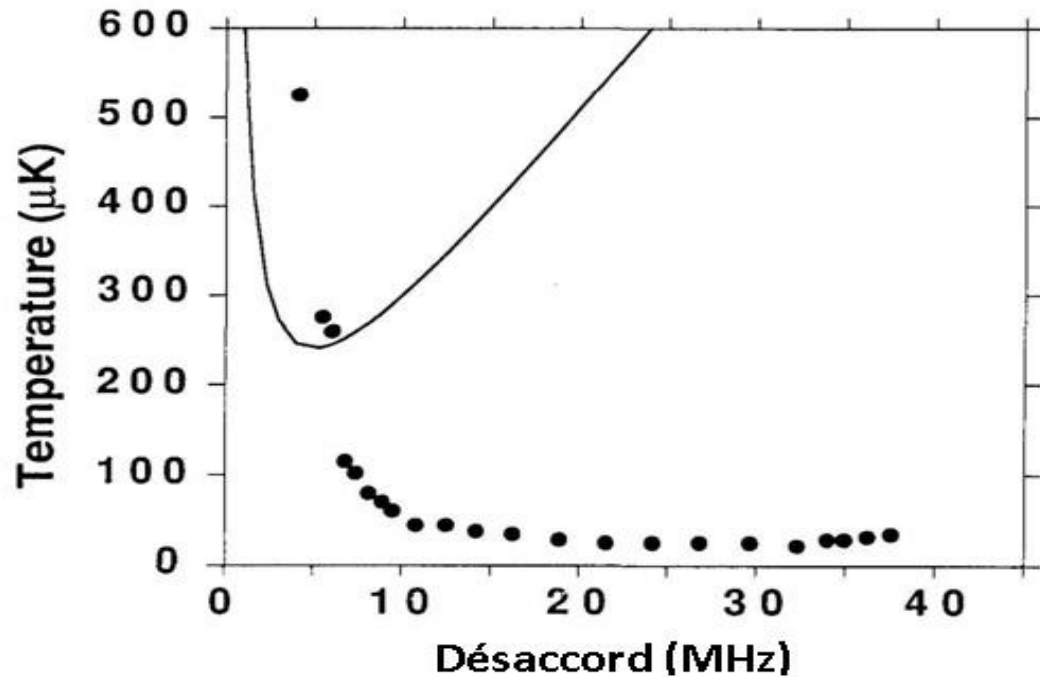


FIG. 5.9: Température en fonction du désaccord : la courbe théorique en trait plein, les points expérimentaux sont obtenus par B. Philips [31].

5.5.2 Etude en fonction du désaccord

La théorie du refroidissement Doppler prédit une température minimale égale à $T_{\min} = \frac{\hbar\Gamma}{2k_B}$ [77], soit une valeur $T_{\min} = 146 \mu K$ pour le rubidium et $240 \mu K$ pour le sodium.

En 1988, B. Philips et son équipe ont effectué une série de mesures de température sur des atomes de sodium refroidis dans une mélasse optique. Alors qu'ils s'attendaient à trouver des températures compatibles avec la limite de refroidissement Doppler, ils ont mesuré des températures beaucoup plus basses que $T_{\min} = 240 \mu K$ [31]. De plus, sa variation en fonction du désaccord ne correspondait plus avec ce qu'on attendait,

T diminuait quand $|\delta_0|$ augmentait au delà de plusieurs Γ , alors que T_{\min} est attendue pour $\delta_0 = -\frac{\Gamma}{2}$ (figure 5.9).

Le mécanisme à l'origine de ces résultats a été baptisé refroidissement sisyphé. Il concerne des atomes dont le niveau fondamental est dégénéré, c'est à dire de moment cinétique J_g non nul. Notons que ce type de refroidissement n'est pas le seul mécanisme conduisant à des températures sub-Doppler, une série d'articles a été publiée à la fin des années 90 où l'on a présenté et comparé ces différents mécanismes [19, 78]. Cependant, les températures prédites dans ces modèles n'ont jamais été mesurées ; au lieu de $T = 200 \text{ nK}$, la plus basse température atteinte jusque là sur le césium est de $T_{\min} = (2.5 \pm 0.6) \mu\text{K}$ [79].

On note, par ailleurs, que ces mécanismes sont plus efficaces à faible saturation, ainsi les atomes restent le maximum de temps dans l'état fondamental qui est dégénéré, condition nécessaire à l'origine de ce type de refroidissement. Au contraire, dans notre modèle, on ignore ce mécanisme et on se met dans une situation où le niveau fondamental est non dégénéré ($J_g = 0$). On souhaite, par cela, retrouver l'effet du chauffage par la saturation évoqué plus haut et comparer le résultat des simulations dans la limite des faibles saturations avec la courbe théorique de la température établie dans le cadre du seul mécanisme de refroidissement Doppler.

L'allure générale de la température Doppler en fonction du désaccord δ_0 est représentée sur la figure 5.9. Elle présente une valeur minimale $T(-\frac{\Gamma}{2}) = 240 \mu\text{K}$, elle augmente brutalement en se rapprochant de la résonance i.e. $\delta_0 \rightarrow 0$, et croit

progressivement aux désaccords $-\delta_0 > \frac{\Gamma}{2}$.

Ce modèle reproduit cette allure aussi bien à faibles intensités $i_0 \ll I_{sat}$ qu'à fortes intensités des lasers $i_0 \gg I_{sat}$. Sur la figure 5.10 sont comparées la température obtenue par ce modèle dans les deux régimes de fonctionnement du piège et celle prédite par le même modèle Doppler à faibles saturations. La courbe en triangles pleins est obtenue pour une intensité $i_0 = 5 I_{sat}$ dans chacun des faisceaux. On constate, qu'en diminuant l'intensité jusqu'à $i_0 = 0.3 I_{sat}$, la température calculée par le modèle (triangles vides) coïncide avec la courbe théorique prévue (en trait plein). Les résultats sont obtenus sur l'atome de césium, et la température minimale est bien égale à $125 \mu K$. Cependant, à fortes saturations, tout en ayant le même comportement, la température en fonction du désaccord représente un minimum à une valeur bien supérieure (en valeur absolue) à $\frac{\Gamma}{2}$ soit $\delta_0 = -1.6 \Gamma$, et la température minimale correspondante est égale à trois fois la valeur obtenue à faibles valeurs de i_0 .

Il est bien connu que lorsqu'on s'approche de la résonance, c'est à dire $\delta_0 \rightarrow 0$, le comportement du piège devient instable. Il convient, pour avoir un piège stable de travailler à des désaccords proches de -3Γ . L'allure générale de la densité spatiale est une gaussienne. Sur la figure 5.11 représentant la densité spatiale (pour 4 valeurs du désaccord), la gaussienne est d'autant plus étroite³ que l'on se rapproche de la résonance atomique. Cependant, la densité maximale a le comportement opposé. Cette

³Puisque la largeur de la gaussienne est reliée à la taille du PMO.

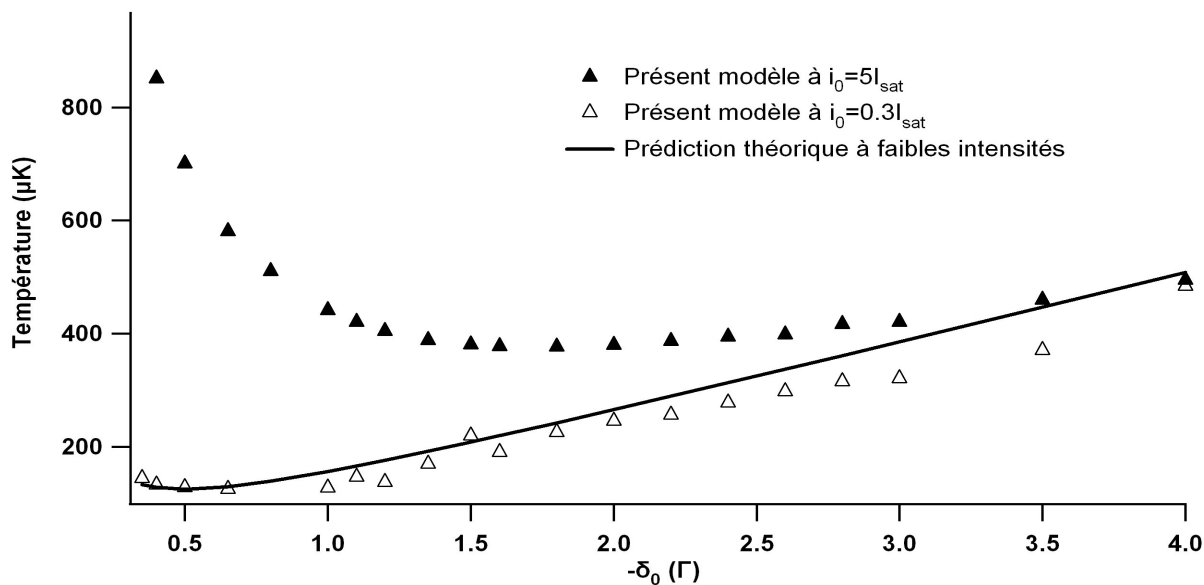


FIG. 5.10: Température d'équilibre en fonction du désaccord δ_0 des lasers par rapport à la transition atomique.

dernière augmente quand le désaccord diminue en valeur absolue. Les simulations sont faites pour plusieurs valeurs du désaccord δ_0 , allant de -3Γ à -1.5Γ .

En définitif, on peut schématiser ces comportements opposés respectivement de la densité spatiale et de la taille du piège sur la figure 5.12. Chacune des deux grandeurs est déterminée en faisant un fit gaussien soit de la forme $K_1 \exp(-(\frac{z-K_3}{K_4})^2)$ où K_4 correspond au diamètre du piège, K_1 à la densité maximale atteinte et $K_3 \simeq 0$ à la position du centre.

5.5.3 Effet de la diffusion multiple

L'effet de la diffusion multiple sur la taille du piège a été étudié pour la première fois par l'équipe de Wieman pour un piège sphérique [49]. Il a ensuite été repris par

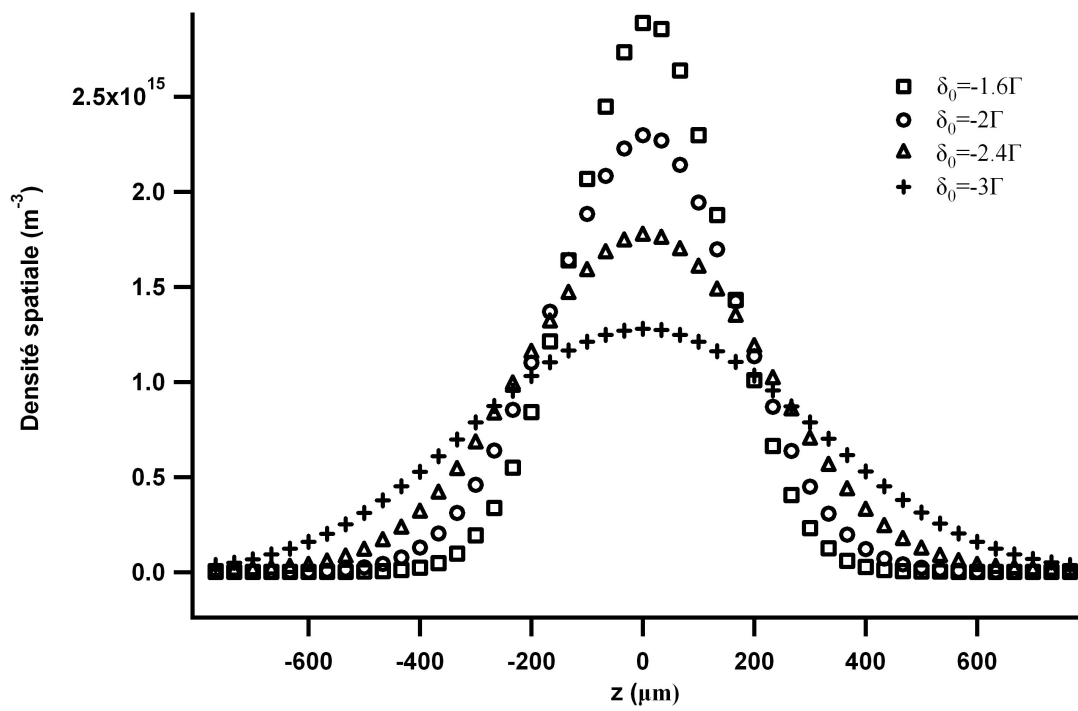


FIG. 5.11: Densité spatiale pour quatre valeurs du désaccord.

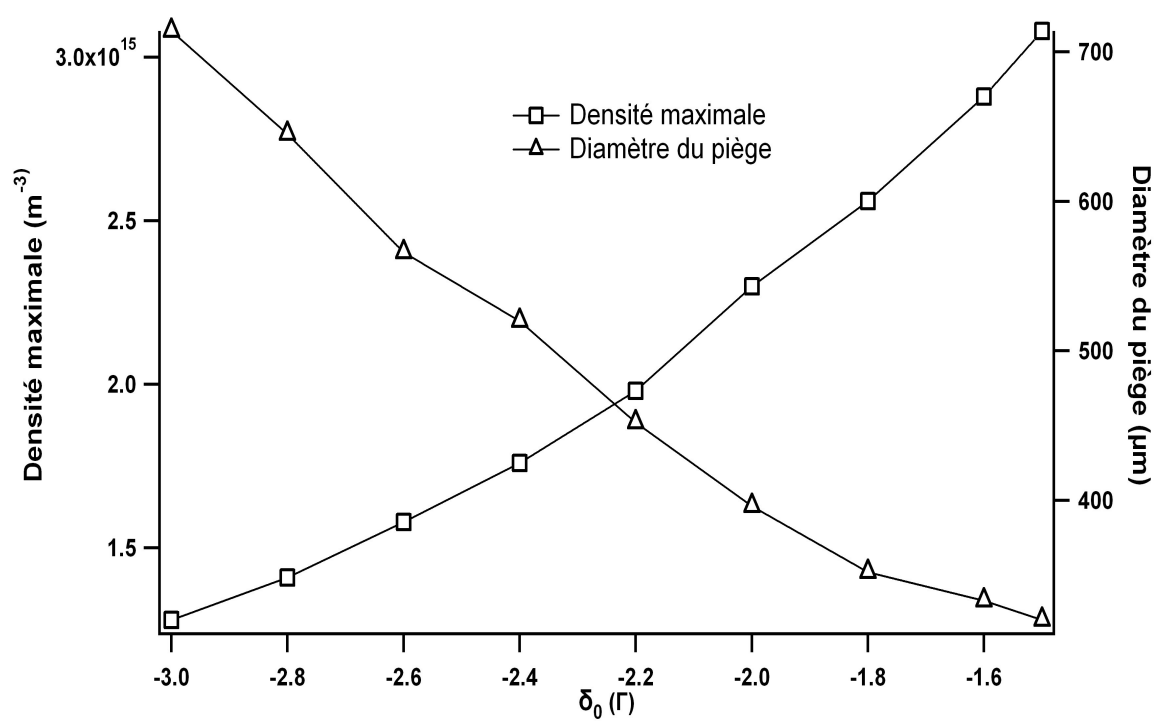


FIG. 5.12: Diamètre du piège et densité maximale atteinte en fonction du désaccord δ_0 .

d'autres équipes [65, 67, 80].

Rappelons que le phénomène de diffusion multiple prend naissance avec la réabsorption par un atome des photons émis par d'autres atomes. C'est une interaction répulsive de longue portée. Elle a pour conséquence de limiter la contraction du piège sous l'effet de la seule force de piégeage. Il est alors indispensable de tenir compte de cet effet pour une mesure précise de la taille d'un piège ainsi que de sa densité. On se propose de faire une étude de la densité spatiale pour différentes valeurs de la section efficace σ de réabsorption des photons de fluorescence et de montrer qu'effectivement la taille augmente avec la valeur de σ .

Sans la diffusion multiple, l'allure de la force en fonction de la position est toujours linéaire, c'est aussi le cas en fonction de la vitesse v . La mesure de la pente détermine respectivement le coefficient de rappel et le coefficient de friction. La diffusion multiple change l'allure spatiale de la force, puisque elle tend à contrebalancer le terme de contraction. On compare les deux cas, avec ou sans la diffusion multiple. Sur la figure 5.13, est représentée la force de rappel, quant à la densité atomique, elle est représentée sur la figure 5.14. L'effet de la diffusion multiple apparaît clairement : la force s'annule sur toute la zone de piégeage. On peut d'ailleurs estimer la taille du piège directement sur le profil de la force.

Des simulations sont faites en fonction de la section efficace σ , la figure 5.15 représente la densité spatiale d'atomes pour différentes valeurs de σ . On remarque effectivement que la taille augmente et l'amplitude diminue avec σ . Pour $\sigma = 0$, le

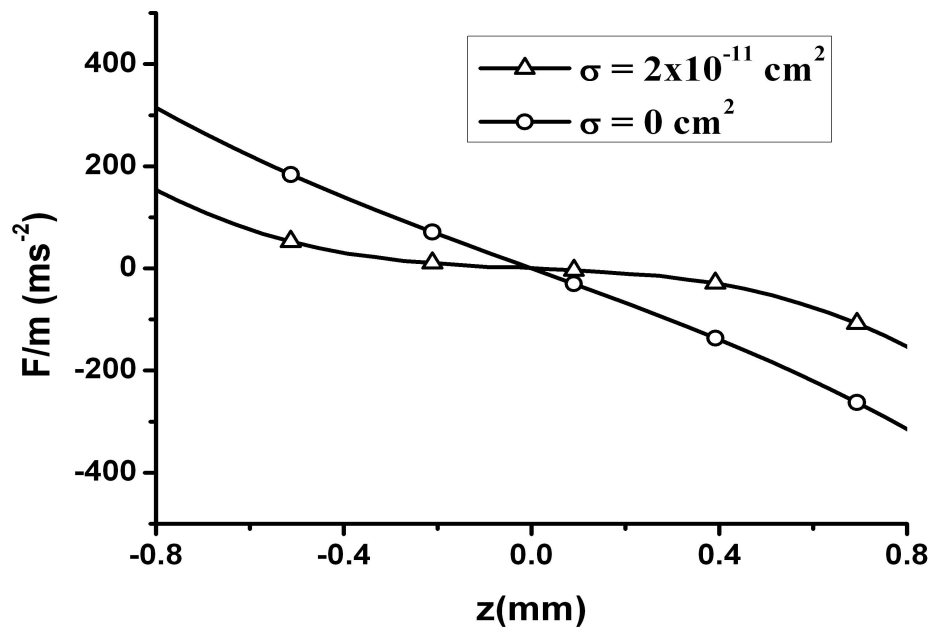


FIG. 5.13: Accélération des atomes de vitesse nulle en fonction de z . En triangle, on inclue la diffusion multiple et en cercle celle-ci est négligée.

profil de la densité est gaussien. Lorsque σ augmente, l'allure reste gaussienne avec une largeur de plus en plus grande. A partir de $\sigma = 1.4 \times 10^{-10} \text{ cm}^2$, l'allure se déforme et prend un caractère instable. Le diamètre du piège est de $850 \mu\text{m}$ pour $\sigma = 2 \times 10^{-11} \text{ cm}^2$.

5.5.4 Effet de la disposition des faisceaux

Jusque là, les faisceaux de la mélasse sont indépendants, la géométrie utilisée est symétrique. Dans une géométrie asymétrique, le faisceau retour est obtenu par réflexion par un miroir. Cette dernière disposition est de loin la plus utilisée expéri-

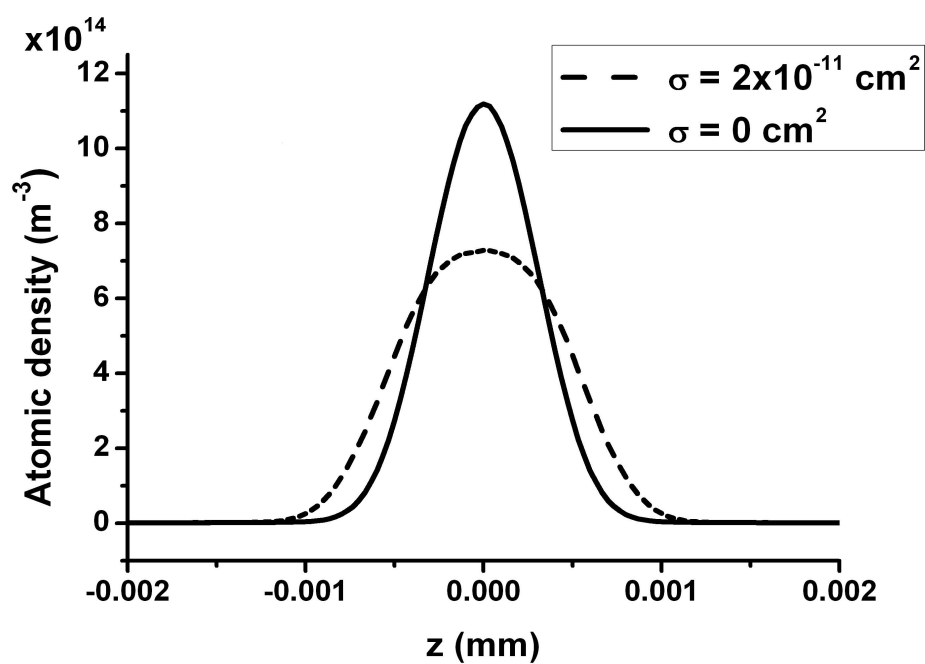


FIG. 5.14: Densité spatiale d'atomes en présence et en absence de la diffusion multiple.

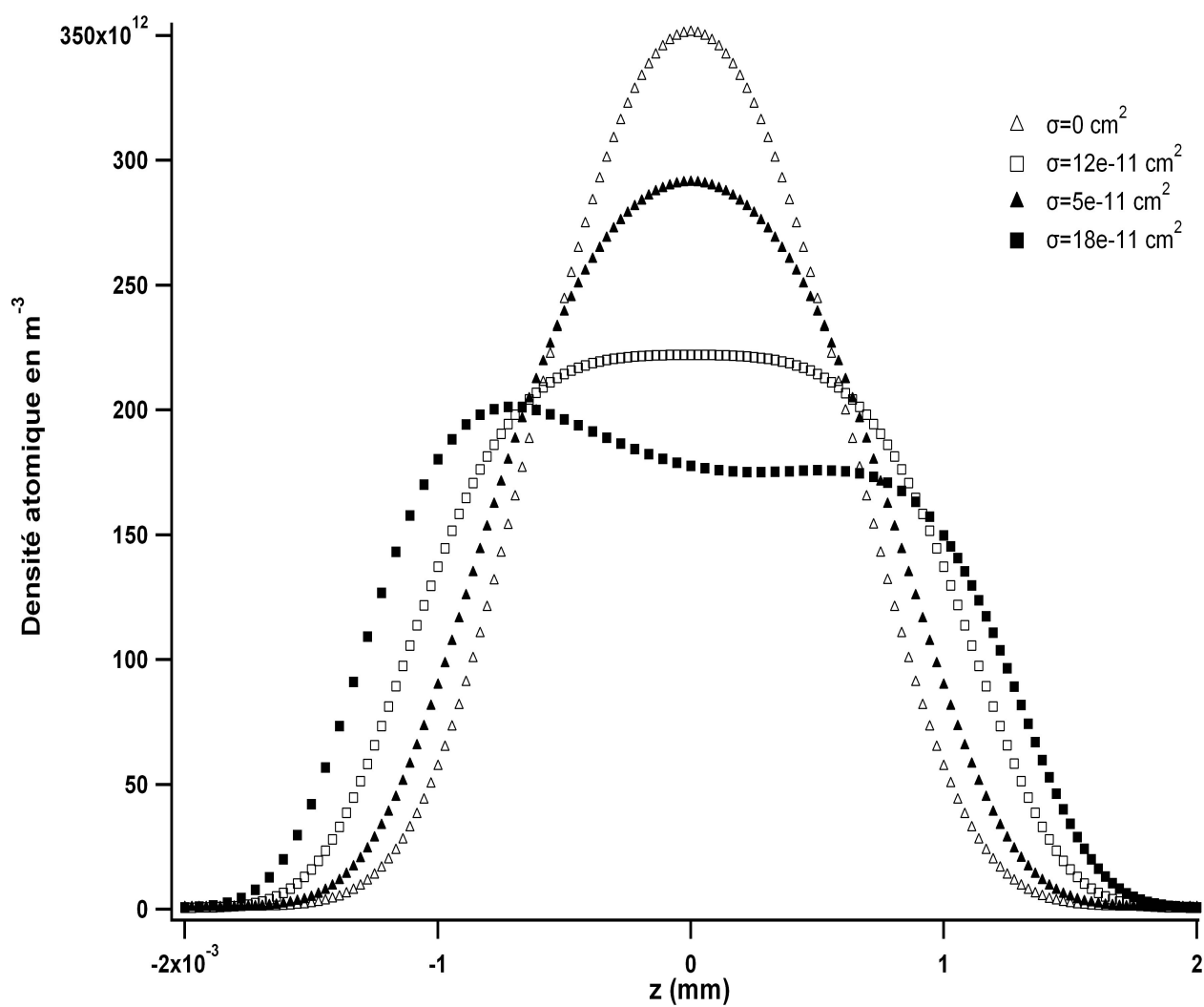


FIG. 5.15: Densité spatiale d'atomes piégés pour différentes valeurs de la section efficace de diffusion multiple.

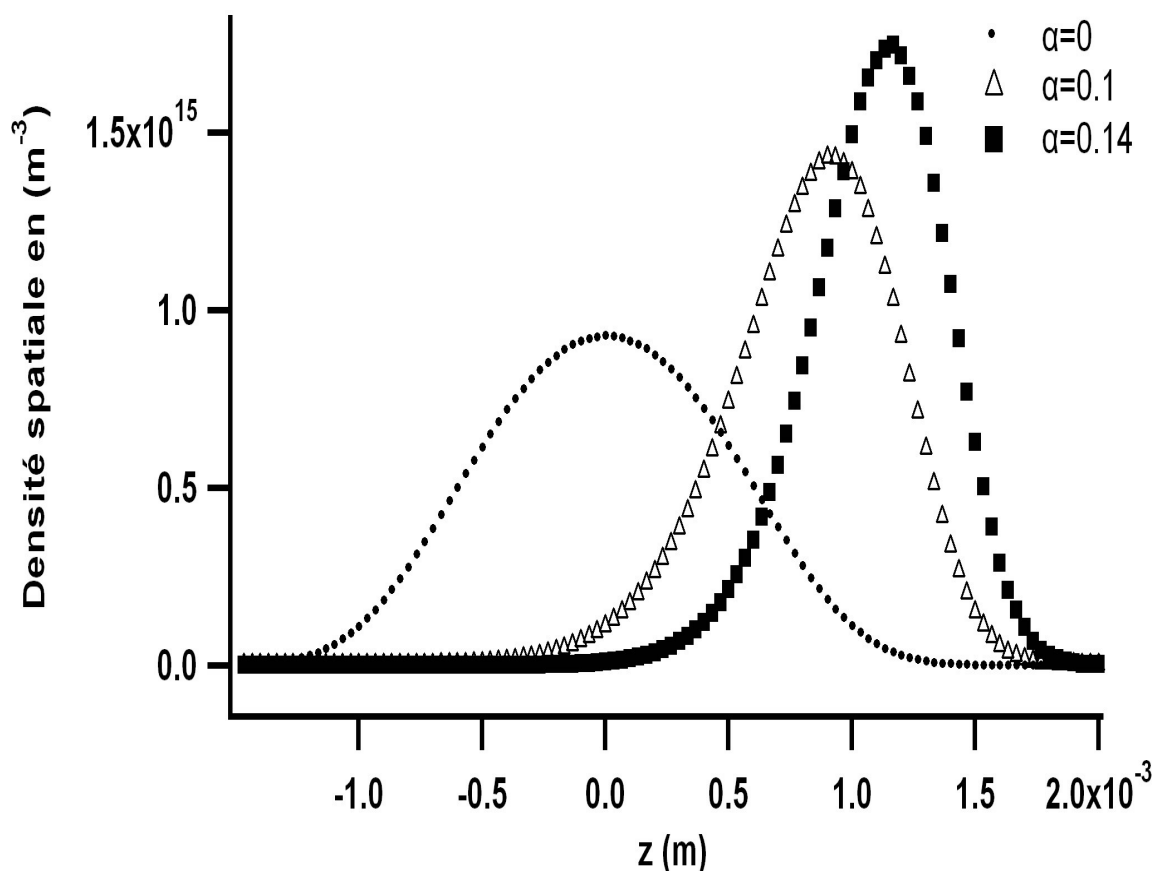


FIG. 5.16: Densité spatiale d'atomes pour trois valeurs du coefficient de pertes $\alpha = 0, 10$, et 14% aux niveaux des dioptries.

mentalement. Il en résulte un déplacement du centre de masse du piège par rapport au zéro du champ magnétique. A trois dimensions, le centre de masse du piège suit la bissectrice des trois faisceaux, comme le montre la figure 4.16. Le même effet a été reporté dans la littérature [48]. On l'explique par la différence en intensité des faisceaux aller et retour.

Dans un premier temps, les simulations sont faites sans la prise en compte des pertes sur les dioptries. La courbe de la densité spatiale est représentée sur la figure

5.16, (courbe en cercle). Ce qui illustre le fait que le centre du piège coïncide bien avec le zéro du champ magnétique.

Considérons l'effet des pertes sur les dioptries. On définit pour cela le coefficient α caractérisant ces pertes. Les deux autres courbes de la figure 5.16 correspondant aux deux valeurs de $\alpha=0.1$ et $\alpha = 0.14$ sont obtenues pour les mêmes valeurs de paramètres du désaccord, du champs magnétique et de l'intensité. Le résultat est que le piège est décalé du zéro du champ magnétique. Cependant, la température reste sensiblement la même dans les différents cas de figures.

5.6 Conclusion

Dans cette partie, nous nous sommes intéressé à la modélisation d'un Piège Magnéto-Optique (PMO). Nous avons développé dans l'espace des phases un modèle théorique unidimensionnel de Piège Magnéto-Optique qui reproduit les effets de saturation et de diffusion multiple sur le refroidissement et le piégeage des atomes.

Les populations atomiques stationnaires sont calculées à partir de l'équation du pompage optique en tenant compte du terme de relaxation par émission spontanée en fonction des paramètres du piégeage.

La simulation est effectuée en utilisant l'équation de Fokker-Planck en prenant en considération l'effet d'ombre et la diffusion multiple des photons de fluorescence du nuage d'atomes. Ceci est indispensable pour reproduire correctement la taille mesurée expérimentalement du piège. Cette dernière est une conséquence directe de la compé-

tition des deux effets. Ainsi, la taille augmente avec la section efficace de la diffusion multiple.

Les résultats numériques du modèle sont en accord avec ceux obtenus par l'expérience pour un élément alcalin (Na). Dans la limite de faible saturation, la température prévue par le modèle est plus proche de la température expérimentalement mesurée que celle de la courbe théorique.

Conclusion générale

Dans la première partie de la thèse, nous avons étudié les taux d'atténuation fermioniques dans le cadre de l'électrodynamique quantique à température finie en utilisant le programme de resomme HTL. Notre motivation principale était de voir si des divergences infrarouges émergeraient pour ces taux d'atténuation comme c'est le cas pour les théories non-abéliennes [54, 17].

Nous avons déterminé les expressions analytiques de ces taux jusqu'à l'ordre deux suivant le moment externe du fermion. Nous avons ensuite effectué le calcul numérique des trois coefficients de ce développement. Les ordres zéro et un sont finis mais des divergences infrarouges logarithmiques apparaissent à l'ordre deux du moment externe p du fermion.

Comment peut-on comprendre ces divergences ? Sont-elles vraiment physiques ou sont-elles seulement dues à la méthode de calcul utilisée ? En effet, notre méthode de calcul est fondée sur une expansion suivant les puissances du moment des fermions de la self-énergie fermionique. Cette expansion est faite tôt dans le calcul, avant même la somme sur la fréquence de Matsubara. Pour voir vraiment si notre méthode de calcul est seule responsable des divergences infrarouges, il faut pouvoir faire le même calcul d'une façon qui éviterait cette expansion et de déterminer si le résultat présente des divergences. Malheureusement, les expressions sont tellement compliquées qu'il est difficile de concevoir une autre façon pratique de calculer. Néanmoins, des calculs menés dans le cadre d'une théorie plus simple, l'électrodynamique quantique scalaire

(SQED) [81] révèlent des divergences infrarouges. Un tel résultat est encourageant dans le sens où il permet de penser que ces divergences ne sont pas complètement dues à notre méthode de calcul.

Ces divergences infrarouges rencontrées en QCD persistent bien en QED. Cela nous laisse penser que la présence des divergences est une indication que la resomme HTL n'est pas complète. En d'autres termes, il existerait certains effets physiques importants non-incorporés dans l'approximation HTL.

La deuxième partie de la thèse a été consacrée au refroidissement des atomes par laser. Dans la partie expérimentale, nous avons présenté les différentes facettes de la réalisation expérimentale d'un Piège Magnéto-Optique (PMO). Nous nous sommes intéressés à la technique de l'injection des esclaves pour pouvoir piéger efficacement les atomes. Cette technique nous a permis d'avoir des faisceaux de fréquence stabilisée au voisinage de la transition de refroidissement et de puissance suffisante assurant un ralentissement efficace des atomes.

Dans la partie modélisation, le travail effectué est la conception d'un modèle local unidimensionnel de PMO. Celui-ci permet de décrire l'évolution d'un atome dans la transition atomique $J = 0 \rightarrow J = 1$ dans un PMO où les faisceaux sont soit rétro-réfléchis soit indépendants. Notre modèle devrait nous permettre, à l'avenir, d'étudier localement les instabilités dans les pièges magnéto-optiques à faisceaux laser indépendants.

Ce modèle constitue une nette amélioration par rapport à celui présenté dans la

référence [46] où les instabilités ont été considérées de façon globale. Premièrement, dans cette dernière, l'effet d'ombre est étudié globalement, car la force totale est calculée à partir des intensités aux bords du piège. Deuxièmement, la diffusion multiple qui est indispensable pour une description locale du PMO, n'est pas prise en compte. Notre modèle qui tient compte localement des deux effets, a par ailleurs été exploité pour rendre compte de certains effets expérimentalement observés dans les PMO : l'élargissement des niveaux excités dû à la saturation, le chauffage induit par la saturation, l'effet de la diffusion multiple sur la taille observée des PMO et enfin l'effet des pertes en intensité au niveaux des dioptries sur le déplacement du centre du piège.

Annexe A

Comment déterminer les Hard Thermal Loops (HTL) ?

Dans cette annexe, nous fournissons plus de détails quant à la détermination des différentes HTL.

L'approximation HTL consiste à négliger tous les moments externes soft devant les moments internes hard de la boucle. En particulier, nous faisons les approximations suivantes :

$$ip_0 \pm \left(k + \left| \vec{p} - \vec{k} \right| \right) \simeq \pm 2k ; \quad ip_0 \pm \left(k - \left| \vec{p} - \vec{k} \right| \right) \simeq ip_0 \pm p \cos \theta. \quad (\text{A.1})$$

où θ est l'angle entre \vec{p} et \vec{k} . Quant aux fonctions de distribution de Bose-Einstein

et de Fermi-Dirac, nous avons :

$$\begin{aligned}
n(k) + \tilde{n}\left(\left|\vec{p} - \vec{k}\right|\right) &\simeq n(k) + \tilde{n}(k); \\
\tilde{n}(k) + \tilde{n}\left(\left|\vec{p} - \vec{k}\right|\right) &\simeq 2\tilde{n}(k); \\
\tilde{n}(k) - \tilde{n}\left(\left|\vec{p} - \vec{k}\right|\right) &\simeq -\frac{p \cos \theta}{T} \tilde{n}(k) (1 - \tilde{n}(k)).
\end{aligned} \tag{A.2}$$

A.1 Sommation sur les fréquences de Matsubara

La sommation sur les fréquences de Matsubara doit être effectuée avant le calcul des différentes intégrales. Donnons ici quelques exemples sur la manière dont sont effectuées ces sommations. Soit un terme faisant intervenir deux propagateurs bosoniques :

$$I_n = T \sum_{k_0} k_0^n \Delta_{s_1}(ik_0, k) \Delta_{s_2}(ip_0 - ik_0, q), \tag{A.3}$$

où $s_{1,2} = \pm$, et $\Delta_s(ik_0, k)$ est défini à partir de (1.16) par :

$$\Delta(ik_0, k) = \sum_{s=\pm 1} \Delta_s(ik_0, k) = \sum_{s=\pm 1} -\frac{s}{2k} \frac{1}{ik_0 - sk}, \tag{A.4}$$

discutons d'abord le cas $n = 0$. La sommation sur k_0 est faite à l'aide de la relation (2.34), l'intégration sur les arguments temps réduit I_0 à :

$$I_0 = -\frac{s_1 s_2}{2k 2q} \frac{1 + f(s_1 k) + f(s_2 q)}{ip_0 - s_1 k - s_2 q}, \tag{A.5}$$

avec $f(k) = n(k)$ et $f(-k) = -n(k) - 1$.

Le cas $n = 1$ se traite de la manière suivante. En dérivant la fonction delta de

l'équation (2.34), nous obtenons :

$$T \sum_{k_0} ik_0 e^{ik_0(\tau-\tau')} = \partial_\tau \delta(\tau - \tau'), \quad (\text{A.6})$$

nous avons alors :

$$I_1 = \frac{is_2}{4q} \frac{1 + f(s_1k) + f(s_2q)}{ip_0 - s_1k - s_2q}, \quad (\text{A.7})$$

soit alors $ik_0 \equiv s_1k$, et donc $I_1 = -\frac{ik}{s_1} I_0$. Par recurrence, on montre que :

$$I_n = \left(-\frac{ik}{s_1} \right)^n I_0. \quad (\text{A.8})$$

Les autres contextes fermion-boson et fermion-anti-fermion se déduisent directement en substituant $f(s_i k)$ par $-\tilde{f}(s_i k)$ avec $\tilde{f}(k) = \tilde{n}(k)$ et $\tilde{f}(-k) = \tilde{n}(k) - 1$. Nous avons la définition :

$$J_n = T \sum_{k_0} k_0^n \Delta_{s_1}(ik_0, k) \tilde{\Delta}_{s_2}(ip_0 - ik_0, q), \quad (\text{A.9})$$

$\tilde{\Delta}_{s_2}(ik_0, k)$ est défini à partir de (1.14) par :

$$\tilde{\Delta}(ik_0, k) = \sum_{s=\pm 1} \tilde{\Delta}_s(ik_0, k) = \sum_{s=\pm 1} -\frac{s}{2k} \frac{1}{ik_0 - sk}. \quad (\text{A.10})$$

Nous obtenons :

$$J_0 = -\frac{s_1 s_2}{2k 2q} \frac{1 + f(s_1k) - \tilde{f}(s_2q)}{ip_0 - s_1k - s_2q}; \quad J_n = \left(-\frac{ik}{s} \right)^n J_0, \quad (\text{A.11})$$

pour le contexte fermion-anti-fermion, nous avons la définition :

$$T_n = T \sum_{k_0} k_0^n \tilde{\Delta}_{s_1}(ik_0, k) \tilde{\Delta}_{s_2}(ip_0 - ik_0, q), \quad (\text{A.12})$$

ainsi :

$$T_0 = -\frac{s_1 s_2}{2k 2q} \frac{1 - \tilde{f}(s_1k) - \tilde{f}(s_2q)}{ip_0 - s_1k - s_2q}; \quad T_n = \left(-\frac{ik}{s} \right)^n T_0. \quad (\text{A.13})$$

A.2 Intégration

Examinons de près les types d'intégrales rencontrées dans le chapitre 1, et voyons comment extraire les HTL associées.

A.2.1 Les self-énergies

De l'expression (1.24) de la self-énergie fermionique, nous voyons qu'il est nécessaire de savoir évaluer des intégrales du type α_μ :

$$\alpha_\mu = e^2 \int_{hard} \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} K_\mu \Delta(K) \tilde{\Delta}(P - K), \quad (\text{A.14})$$

avec $\int_{hard} \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} = T \sum_{k_0} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3}$.

En utilisant (A.11), nous obtenons le résultat suivant pour α^0 :

$$\begin{aligned} \alpha_0(p) = & i e^2 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{4q} \left[(1 + n(k) - \tilde{n}(q)) \left(\frac{1}{ip_0 - k - q} + \frac{1}{ip_0 + k + q} \right) \right. \\ & \left. - (n(k) + \tilde{n}(q)) \left(\frac{1}{ip_0 - k + q} + \frac{1}{ip_0 + k - q} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Pour les autres composantes, nous avons :

$$\begin{aligned} \alpha_i(p) = & -e^2 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{k_i}{2k2q} \left[(1 + n(k) - \tilde{n}(q)) \left(\frac{1}{ip_0 - k - q} - \frac{1}{ip_0 + k + q} \right) \right. \\ & \left. + (n(k) + \tilde{n}(q)) \left(\frac{1}{ip_0 + k - q} - \frac{1}{ip_0 - k + q} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Les HTL correspondantes sont déterminées en utilisant les approximations (A.1) et (A.2) et la relation suivante :

$$\int_0^\infty dk k n(k) = 2 \int_0^\infty dk k \tilde{n}(k) = \frac{\pi^2 T^2}{6}. \quad (\text{A.17})$$

Nous avons le résultat suivant :

$$\delta\Sigma(p) = -2(\gamma_0 h_0 + \gamma_i h_i), \quad (\text{A.18})$$

avec

$$h_0(p) = -\frac{m_f^2}{2} \int \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{i}{P.K} ; \quad h_i(p) = -\frac{m_f^2}{2} \int \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{\widehat{k}_i}{P.K}. \quad (\text{A.19})$$

Les intégrales angulaires se calculent sans difficulté. La HTL totale est donc :

$$\delta\Sigma(P) = \frac{m_f^2}{p} Q_0\left(\frac{ip_0}{p}\right) \gamma_0 + \vec{\gamma} \cdot \vec{p} \frac{m_f^2}{p} \left(1 - \frac{ip_0}{p} Q_0\left(\frac{ip_0}{p}\right)\right), \quad (\text{A.20})$$

où $m_f = \frac{1}{2\sqrt{2}}eT$ est la masse thermique fermionique et $Q_0\left(\frac{ip_0}{p}\right)$ est une fonction de Legendre de seconde espèce, elle est donnée par $Q_0\left(\frac{ip_0}{p}\right) = \frac{1}{2} \log \frac{ip_0+p}{ip_0-p}$.

Pour ce qui est de la HTL associée au propagateur photonique, les calculs sont similaires. Il faut utiliser les relations (A.13). En intégrant sur les angles solides, nous obtenons les composantes de $\delta\Pi_{\mu\nu}$ données dans (1.28).

A.2.2 Les vertices

Dans le calcul de $\delta\Gamma_\mu$ de l'équation (1.34), les termes à calculer sont de la forme :

$$\int_{hard} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} K_\mu K_\nu \Delta(K) \widetilde{\Delta}(P_1 - K) \widetilde{\Delta}(P_2 - K). \quad (\text{A.21})$$

Définissons :

$$R_n = T \sum_{k_0} k_0^n \Delta(K) \widetilde{\Delta}(P_1 - K) \widetilde{\Delta}(P_2 - K), \quad (\text{A.22})$$

en utilisant les expressions (A.4) et (A.10) :

$$\begin{aligned}
\Delta(K)\tilde{\Delta}(P_1 - K)\tilde{\Delta}(P_2 - K) &= \sum_{s=\pm 1} \sum_{s_2=\pm 1} \sum_{s_1=\pm 1} \left(-\frac{s}{2k}\right) \left(-\frac{s_1}{2q_1}\right) \left(-\frac{s_2}{2q_2}\right) \\
&\quad \times \frac{1}{ik_0 - sk} \frac{1}{ip_{01} - ik_0 - s_1q_1} \frac{1}{ip_{02} - ik_0 - s_2q_2}, \\
\Delta(K)\tilde{\Delta}(P_1 - K)\tilde{\Delta}(P_2 - K) &= \sum_{s=\pm 1} \sum_{s_1=\pm 1} \sum_{s_2=\pm 1} \left(-\frac{ss_1s_2}{8kq_1q_2}\right) \frac{1}{(ip_{01} - ip_{02}) - s_1q_1 + s_2q_2} \\
&\quad \times \left(\frac{1}{ip_{02} - ik_0 - s_2q_2} - \frac{1}{ip_{01} - ik_0 - s_1q_1} \right). \quad (\text{A.23})
\end{aligned}$$

Compte tenu de cette relation et de la relation (A.11), nous avons :

$$\begin{aligned}
R_0 &= \sum_{s=\pm 1} \sum_{s_2=\pm 1} \sum_{s_1=\pm 1} \left(-\frac{s}{2k}\right) \left(-\frac{s_1}{2q_1}\right) \left(-\frac{s_2}{2q_2}\right) \quad (\text{A.24}) \\
&\quad \times \frac{1}{(ip_{01} - ip_{02}) - s_1q_1 + s_2q_2} \left(\frac{1 + f(sk) - \tilde{f}(s_1q_1)}{ip_{01} - sk - s_1q_1} - \frac{1 + f(sk) - \tilde{f}(s_2q_2)}{ip_{02} - sk - s_2q_2} \right).
\end{aligned}$$

Les autres composantes s'obtiennent en se servant de la correspondance $ik_0 \rightarrow sk$, nous avons :

$$R_1 = -\frac{ik}{s}R_0 ; \quad R_2 = -k^2R_0. \quad (\text{A.25})$$

Les HTL ne font intervenir que les termes où $s = -s_1$ et $s = -s_2$. De la même manière que pour $\delta\Sigma$, en faisant les approximations (A.1), (A.2) et la relation (A.17), nous obtenons les résultats suivants pour $\delta\Gamma_\mu$:

$$\delta\Gamma_0(P_1, -P_2) = -m_f^2 \int \frac{d\Omega_k}{4\pi} \frac{i\hat{K}}{P_1.K P_2.K} ; \quad \delta\Gamma_i(P_1, -P_2) = -m_f^2 \int \frac{d\Omega_k}{4\pi} \frac{\hat{K}\hat{k}_i}{P_1.K P_2.K}. \quad (\text{A.26})$$

Les HTL $\delta\Gamma_{\mu\nu}(p)$ peuvent être obtenues de la même manière que précédemment.

Cependant, l'utilisation des identités de Ward, tel qu'il est montré dans la section (3.3.4), facilite notablement le calcul.

Annexe B

Equations de Bloch optiques pour un atome à deux niveaux

Dans cette annexe, en traitant quantiquement l'atome, on montre sous quelles conditions l'expression classique de la force peut encore être utilisée, en particulier, sa valeur moyenne. Pour rendre compte de la structure interne de l'atome, on choisit les équations de Heisenberg décrivant le centre de masse. La valeur moyenne de la force est calculée en utilisant le théorème d'Ehrenfast.

On considère un atome à deux niveaux en interaction avec une onde lumineuse laser de fréquence ω_l . Les deux niveaux sont espacés par l'énergie $E = \hbar\omega_A$.

On introduit le dipôle réduit de la transition $|e\rangle \rightarrow |g\rangle$: $\mathbf{d} = \langle e | \hat{\mathbf{D}} | g \rangle$. L'opérateur dipolaire électrique $\hat{\mathbf{D}}$ s'écrit :

$$\hat{\mathbf{D}} = \mathbf{d}_+ |e\rangle \langle g| + \mathbf{d}_- |g\rangle \langle e| = \hat{\mathbf{D}}_+ + \hat{\mathbf{D}}_- . \quad (\text{B.1})$$

On suppose que l'onde laser est un champ classique extérieur dépendant du temps :

$$\mathbf{E}_l(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} E_0(\mathbf{r}) (\boldsymbol{\epsilon}_l(\mathbf{r}) e^{-i\omega_l t - i\phi(\mathbf{r})} + \boldsymbol{\epsilon}_l^*(\mathbf{r}) e^{i\omega_l t + i\phi(\mathbf{r})}). \quad (\text{B.2})$$

Dans l'approximation dipolaire électrique, l'Hamiltonien du système s'écrit :

$$\hat{H} = \frac{\hat{\mathbf{P}}^2}{2m} + \hbar\omega_A |e\rangle \langle e| + H_R + V_{AL} + V_{AR}. \quad (\text{B.3})$$

L'interaction de l'atome avec le vide est responsable de l'émission spontanée, elle est donnée par le dernier terme de l'Hamiltonien V_{AR} . H_R tient compte du rayonnement du vide. Le couplage atome laser se met sous la forme : $\hat{V}_{AL} = -\hat{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{E}_l(\hat{\mathbf{R}}, t)$.

Si l'on prend que les termes résonants :

$$\hat{V}_{AL}(t) \simeq \frac{\Omega_1(\hat{\mathbf{R}})}{2} \left(|e\rangle \langle g| e^{-i\omega_l t - i\phi(\hat{\mathbf{R}})} + |g\rangle \langle e| e^{i\omega_l t + i\phi(\hat{\mathbf{R}})} \right), \quad (\text{B.4})$$

tel que :

$$\hbar\Omega_1(\mathbf{r}) = -(\mathbf{d}_+ \cdot \boldsymbol{\epsilon}_l(\mathbf{r})) E_0(\mathbf{r}). \quad (\text{B.5})$$

Sous la forme matricielle, le couplage s'écrit :

$$\hat{V}_{AL} = \hbar \begin{pmatrix} 0 & \frac{\Omega_1}{2} e^{i\omega_l t + i\phi(\hat{\mathbf{R}})} \\ \frac{\Omega_1}{2} e^{-i\omega_l t - i\phi(\hat{\mathbf{R}})} & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.6})$$

Si on se place sous le point de vue de Heisenberg, les équations d'évolution des opérateurs position et impulsion du centre de masse s'écrivent :

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d\hat{R}}{dt} &= [\hat{R}, \hat{H}]; \\ \frac{d\hat{P}}{dt} &= \frac{1}{i\hbar} [\hat{P}, \hat{H}] = \left(-\vec{\nabla} \hat{V}_{AL} - \vec{\nabla} \hat{V}_{AR} \right) = \hat{F}. \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Selon l'équation (B.7), la moyenne de la force sur l'état atomique contient deux termes. Dans [58], on montre que $\langle V_{AR} \rangle = 0$. En d'autre termes, la force due à l'émission spontanée est nulle et la force moyenne totale se réduit à $-\langle \vec{\nabla} \widehat{V}_{AL} \rangle$.

Selon la condition $\Delta R \ll \lambda$ évoquée plus haut, on peut remplacer $\langle E_l(\widehat{R}) \rangle$ par $E_l(\langle \widehat{R} \rangle)$. La moyenne de la force peut se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned}
 \vec{F} &= -\langle \vec{\nabla} \widehat{V}_{AL} \rangle = \left\langle \sum_{i=x,y,z} \vec{\nabla} \left(D_i E_{l_i}(\widehat{R}, t) \right) \right\rangle \\
 &= \left\langle \sum_{i=x,y,z} D_i(t) \vec{\nabla} E_{l_i}(\widehat{R}, t) \right\rangle \\
 &\simeq \sum_{i=x,y,z} \langle D_i \rangle(t) \vec{\nabla} E_{l_i}(R(t), t). \tag{B.8}
 \end{aligned}$$

Il suffit de moyenner sur les variables internes dont la variation est pilotée par le champ électrique de l'onde évaluée au point $\vec{R}(t)$ de la trajectoire atomique moyenne (théorème d'Ehrenfast). C'est l'approximation semi-classique : le mouvement atomique est traité classiquement et la dynamique interne est traité quantiquement.

Pour aller plus loin, on utilise le fait que l'évolution externe est beaucoup plus lente devant l'évolution interne grâce à la séparation des échelles. On peut utiliser les valeurs stationnaires dans la valeur moyenne du dipôle dans (B.8) ainsi que pour les autres variables internes.

$$\vec{F}(\vec{R}) \simeq \sum_{i=x,y,z} \langle D_i \rangle_{\text{stat}} \vec{\nabla} E_{l_i}(R(t), t). \tag{B.9}$$

On suppose maintenant que l'atome est immobile en \vec{R} . Pour déterminer le dipôle stationnaire $\langle D_i \rangle_{\text{stat}}$, il faudrait calculer les éléments de la matrice densité dans leur

état stationnaire. L'équation d'évolution de la matrice densité :

$$\frac{d\hat{\sigma}}{dt} = i\hbar \left[\hat{H}, \hat{\sigma} \right] + \left. \frac{d\hat{\sigma}}{dt} \right]_{relax}. \quad (\text{B.10})$$

Le dernier terme représente la contribution par émission spontanée. Elle est décrite phénoménologiquement par les éléments de la matrice densité :

$$\left. \frac{d\sigma}{dt} \right]_{spont} = \begin{pmatrix} \Gamma\sigma_{ee} & -\frac{\Gamma}{2}\sigma_{ge} \\ -\frac{\Gamma}{2}\sigma_{eg} & -\Gamma\sigma_{ee} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.11})$$

En développant l'équation matricielle (B.10), on arrive au système :

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{gg}}{dt} &= \frac{\Omega_1(z)}{2i} (\sigma_{eg}e^{i\omega_1 t + i\phi(\mathbf{R})} - \sigma_{ge}e^{-i\omega_1 t - i\phi(\mathbf{R})}) + \Gamma\sigma_{ee}; \\ \frac{d\sigma_{eg}}{dt} &= \frac{d\sigma_{ge}^*}{dt} = -i\frac{\Omega_1(z)}{2} (\sigma_{gg} - \sigma_{ee}) e^{-i\omega_1 t - i\phi(\mathbf{R})} - i\omega_A\sigma_{eg} - \frac{\Gamma}{2}\sigma_{eg}; \\ \frac{d\sigma_{ee}}{dt} &= -\frac{\Omega_1(z)}{2i} (\sigma_{eg}e^{i\omega_1 t + i\phi(\mathbf{R})} - \sigma_{ge}e^{-i\omega_1 t - i\phi(\mathbf{R})}) - \Gamma\sigma_{ee}. \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Pour chercher les solutions stationnaires, il suffit d'annuler le second terme de l'équation (B.10) et de poser l'équation de conservation des populations $\sigma_{gg} + \sigma_{ee} = 1$. De plus, il est commode de réécrire les trois équations en fonction des trois nouvelles variables :

$$u(t) = \frac{1}{2} (\sigma_{ge}e^{-i\omega_1 t - i\phi(\mathbf{R})} + \sigma_{eg}e^{i\omega_1 t + i\phi(\mathbf{R})}); \quad (\text{B.13})$$

$$v(t) = \frac{1}{2i} (\sigma_{ge}e^{-i\omega_1 t - i\phi(\mathbf{R})} - \sigma_{eg}e^{i\omega_1 t + i\phi(\mathbf{R})}); \quad (\text{B.14})$$

$$w(t) = \frac{\sigma_{ee} - \sigma_{gg}}{2}. \quad (\text{B.15})$$

Le système (B.12) est remplacé par un autre système de variables réelles :

$$\frac{du}{dt} = -\frac{\Gamma}{2}u + \delta_0 v; \quad (\text{B.16})$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\Gamma}{2}v - \delta_0 u - \Omega_1(\mathbf{R})v; \quad (\text{B.17})$$

$$\frac{dw}{dt} = \Omega_1(\mathbf{R})v - \Gamma w - \frac{\Gamma}{2}, \quad (\text{B.18})$$

et on arrive à la solution stationnaire :

$$u_{\text{stat}} = \frac{\delta_0}{2\Omega_1(\mathbf{R})} \frac{s(\mathbf{R})}{1+s(\mathbf{R})}; \quad (\text{B.19})$$

$$v_{\text{stat}} = \frac{\Gamma}{2\Omega_1(\mathbf{R})} \frac{(\mathbf{R})}{1+s(\mathbf{R})}; \quad (\text{B.20})$$

$$w_{\text{stat}} = -\frac{1}{2} \frac{1}{1+s(\mathbf{R})}, \quad (\text{B.21})$$

où l'on a défini le paramètre de saturation $s(\mathbf{R})$ par $s(\mathbf{R}) = \frac{1}{2} \frac{\Omega_1^2(\mathbf{R})}{(\delta_0^2 + \Gamma^2/4)}$.

La moyenne stationnaire du dipôle projetée sur la polarisation $\vec{\epsilon}_l$ est :

$$\vec{\epsilon}_l \cdot \langle \hat{D} \rangle = \vec{\epsilon}_l \cdot \vec{d} (\sigma_{eg, \text{stat}} + \sigma_{ge, \text{stat}}) = 2d (u_{\text{stat}} \cos(\omega_l t + \phi(\mathbf{R})) - v_{\text{stat}} \sin(\omega_l t + \phi(\mathbf{R}))). \quad (\text{B.22})$$

Les solutions u_{stat} et v_{stat} apparaissent bien comme les composantes du dipôle respectivement en phase et en quadrature avec le champ.

En utilisant l'expression (B.22) et la définition de la pulsation de Rabi (B.5), la force (B.9) devient :

$$\vec{F}(z) = -2\hbar (u_{\text{stat}} \cos(\omega_l t + \phi(\mathbf{R})) - v_{\text{stat}} \sin(\omega_l t + \phi(\mathbf{R}))) \vec{\nabla} (\Omega_1(\mathbf{R}) \cos(\omega_l t + \phi(\mathbf{R}))). \quad (\text{B.23})$$

En prenant la moyenne sur une période optique, ce qui est compatible avec l'approximation du champ tournant utilisée pour trouver les solutions stationnaires des équations de Bloch optiques, la force moyenne s'écrit :

$$\vec{F}(\mathbf{R}) = -\hbar\Omega_1(\mathbf{R}) \left(u_{\text{stat}} \frac{\vec{\nabla}\Omega_1(\mathbf{R})}{\Omega_1(\mathbf{R})} + v_{\text{stat}} \vec{\nabla}\phi(\mathbf{R}) \right) \quad (\text{B.24})$$

$$= -\hbar\Omega_1(\mathbf{R}) \left(\alpha(\mathbf{R}) \delta_0 + \beta(\mathbf{R}) \frac{\Gamma}{2} \right) \frac{s(\mathbf{R})}{1+s(\mathbf{R})}, \quad (\text{B.25})$$

avec $\alpha(\mathbf{R}) = \frac{\vec{\nabla}\Omega_1(\mathbf{R})}{\Omega_1(\mathbf{R})}$, $\beta(\mathbf{R}) = \vec{\nabla}\phi(\mathbf{R})$.

Bibliographie

- [1] E. Braaten, R. D. Pisarski. Phys. Rev. D42, R2156 (1990).
- [2] H. A. Weldon. Phys. Rev. D26, 1394 (1982).
- [3] H. A. Weldon. Phys. Rev. D26, 2789 (1982).
- [4] O. K. Kalashnikov, V. V. Klimov. Yad. Fiz. 31, 1357 (1980); Sov. J. Nucl. Phys. 31, 699 (1980).
- [5] D. J. Gross, R. D. Pisarski, L. G. Yaffe. Rev. Mod. Phys. 53, 43 (1981).
- [6] K. Kajantie, J. Kapusta. Ann. Phys. 160, 477 (1985).
- [7] T. H. Hansson, I. Zahed. Phys. Rev. Lett. 58, 2397 (1987).
- [8] R. Kobes, G. Kunstatter. Phys. Rev. Lett. 61, 392 (1988).
- [9] U. Kraemmer, M. Kreuser, A. Rebhan. Ann. Phys. 201, 223 (1990).
- [10] R. D. Pisarski. Phys. Rev. Lett. 63, 1129 (1989).
- [11] E. Braaten, R. D. Pisarski. Phys. Rev. D46, 1829 (1990).
- [12] M. H. Thoma. hep-th/ 0010164, unpublished.
- [13] C. Itzykson, J. Zuber. "Quantum Field Theory." (McGraw-Hill, 1980).

- [14] M. Le Bellac. "Thermal Field Theory." (Cambridge University Press, Cambridge, 1996).
- [15] A. Abada, O. Azi, A. Tadj. "Damping Rate for Transverse Gluons with Finite Soft Momentum in Hot QCD." Unpublished.
- [16] A. Abada, O. Azi, K. Benchallal. *Phys. Lett.* B425, 158 (1998).
- [17] A. Abada, K. Bouakaz, N. Daira-Aïfa. *Eur. Phys. J.* C18, 765 (2001).
- [18] C Cohen-Tannoudji, W. D. Phillips. *Phys. Today* 43, 33 (1990).
- [19] J. Dalibard, C Cohen-Tannoudji. "Laser cooling below the Doppler limit by polarisation Gradient : simple theoretical models." *J. Opt. Soc. Am.* B 6, 2023 (1989).
- [20] M. H. Anderson, J. H. Ensher, M. R. Mathews, C. E. Wieman, E. A. Cornell. "Observation of Bose-Einstein condensation in a dilute atomic vapor." *Science* 269, 198 (1995).
- [21] W. Ketterle, N. J. Van Druten. "Advanced in Atomics, molecular and optical physics." Eds. B. Bederson and H. Walther (Academic Press, San Diego, 1996).
- [22] Y. Castin. " Les atomes ultra-froids." *Pour la Science*, 134 (2002).
- [23] A. Einstein. *Phys. Zeitschrift* 18, 121 (1917).
- [24] O. R. Frisch. "Experimenteller nachweis des Einsteinischen Strahlungsrückstosses." *Z. Phys.* 86, 42 (1933).
- [25] J. L. Picque, J. L. Vialle. *Opt. Commun.* 5, 402 (1972).

- [26] A. Kastler. *J. Phys. Rad.* 11, 255 (1950).
- [27] T. W. Hansch, A. L. Schawlow. "Cooling of gases by laser radiation." *Opt. Comm.* 13, 68 (1975).
- [28] W. D. Phillips, H. Metcalf. *Phys. Rev. Lett.* 48, 596 (1982).
- [29] S. Chu, L. Hollberg, J. Bjorkholm, A. Cable, A. Ashkin. *Phys. Rev. Lett.* 55, 48 (1985).
- [30] E. L. Raab, M. Prentiss, A. Cable, S. Chu, D. E. Pritchard. "Trapping of neutral sodium atoms with radiation pressure." *Phys. Rev. Lett.* 59, 2631 (1987).
- [31] P. D. Lett, R. N. Watts, C. I. Westbrook, W. D. Phillips, P. L. Gould, H. J. Metcalf. *Phys. Rev. Lett.* 61, 169 (1988).
- [32] SN. Bose, *Z. Phys.* 26, 178 (1924).
- [33] A. Einstein, *Sitzungsber. K. Preuss. Akad. Wiss. Phys. Math. Kl.* 261 (1924).
- [34] Y. Sortais, S. Bize, C. Nicolas, A. Clairon, C. Salomon, C. Williams. "Cold collision frequency shifts in a ^{87}Rb atomic fountain." *Phys. Rev. Lett.* 85, 3117 (2000).
- [35] G. Santarelli, P. Laurent, P. Lemonde, A. Clairon, A. G. Mann, S. Chang, A. N. Luiten, C. Salomon. "Quantum projection noise in an atomic fountain : a high stability Cesium frequency standard." *Phys. Rev. Lett.* 82, 4619 (1999).
- [36] W. Hänsel, P. Hommelhoff, T. W. Hänsch, J. Reichel. "Bose-Einstein condensation of microelectronic chip." *Nature* 413, 498 (2001).

- [37] Edité par P. Berman. "Atom Interferometry." Academic Press New York (1997).
- [38] R. P. Feynman. "Simulating physics with computers". *Int. J. Theor. Phys.* 21, 467 (1982).
- [39] D. Deutsch. "Quantum Theory, the Church-Turing Principle and the Universal Quantum Computer." *Proc. R. Soc. London A* 400, 97 (1985).
- [40] L. M. K. Vandersypen, M. Steffen, G. Breyta, C. S. Yannoni, M. H. Sherwood, I. L. Chuang. "Experimental realization of Shor's quantum factoring algorithm using nuclear magnetic resonance." *Nature* 414, 883 (2001).
- [41] B. Schumacher. "Quantum coding." *Phys. Rev. A* 51, 2738 (1995).
- [42] B. Déprêt. "Réseaux Optiques de Pièges Annulaires pour atomes froids : Premier pas vers la réalisation d'un ordinateur quantique." Thèse de Doctorat, Université des Sciences et de la Technologie de Lille (2002).
- [43] I. Guedes, M. T. De Araujo, D. M. B. P. Milori, G. I. Surdutovich, V. S. Bagnato, S. C. Zillo. "Forces acting on magneto-optically trapped atoms." *J. Opt. Soc. Am. B* 11, 1935 (1994).
- [44] T. Pohl, G. Labeyrie, R. Kaiser. "Self-driven dynamics in magnéto-optical traps." *arXiv : Physics/ 0602075 v1*, (2006).
- [45] D. Wilkowski, J. Ringot, D. Hennequin, J.C. Garreau. "Instabilities in magneto-optical trap : noise-induced dynamics in an atomic system." *Phys. Rev. Lett.* 85, 1839 (2000).

- [46] D. Hennequin. "Stochastic dynamics of the magneto-optical trap." *Eur. Phys. J. D.* 28, 135 (2004).
- [47] A. di Stefano, M. Fauquembergue, P. Verkerk, D. Hennequin. "Giant oscillations in magneto-optical trap." *Phys. Rev. A* 67, 033404 (2003).
- [48] A. di Stefano, P. Verkerk, D. Hennequin. "Deterministic instabilities in the magneto-optical trap." *Eur. Phys. J. D* 30, 243 (2004).
- [49] D. Sesko, T. Walker, C. Wieman. "Behavior of neutral atoms in a spontaneous force trap." *J. Opt. Soc. Am. B* 8, 946 (1991).
- [50] L. Khaykovich, N. Davidson. "Compression of cold atomic cloud by on resonance laser light." *J. Opt. Soc. Am. B* 16, 702 (1999).
- [51] J. I. Kapusta. "Finite temperature Field Theory." (Cambridge University Press, Cambridge, 1989).
- [52] A. Das. "Finite temperature Field Theory." (World Scientific, Singapore, 1997).
- [53] E. Braaten, R. D. Pisarski. *Nucl. Phys. B*337, 569 (1990); *Phys. Rev. Lett.* 64, 1338 (1990); *Physica A* 158, 246 (1989); *Nucl. Phys. B*339, 310 (1990); *Nucl. Phys. A*498, 423c (1989).
- [54] K. Bouakaz. Thèse de Magister, Ecole Normale Supérieure - Alger (1999).
- [55] R. D. Pisarski. *Nucl. Phys. B*309, 476 (1988).
- [56] J. P Blaizot, E. Lancu et A. Rebhan. *Phys. Rev. D* 63 (2001).
- [57] A. Abada, K. Bouakaz, D. Deghiche. *Mod. Phys. Lett. A* 22, 903 (2007).

- [58] C Cohen-Tannoudji. "Atomic motion in laser light" dans " Fundamental systems in Quantum Optics." Les Houches 1990, Session LIII. Edité par J. Dalibard, J. Raimond, J. Zinn-Justin. (Elsevier Science, Amsterdam, 1992).
- [59] C. Cohen Tannoudji. "Forces exercées par les photons sur des atomes." Cours collège de France, 1982-1983.
- [60] J. Dalibard. "Laser cooling and trapping of atomic gases." Les Houches (2004).
- [61] C. Cohen Tannoudji. "Théorie quantique du Cycle de pompage optique". Ann. Phys. Paris 7, 423 (1962).
- [62] A. Ashkin, J. P. Gordon. "Stability of radiation-pressure particle traps : an optical Earnshaw theorem." Opt. Lett. 8, 511 (1983).
- [63] D. A. Steck. "Rubidium 87 D line Data." unpublished, available on-line at : <http://steck.us/alkalidata>.
- [64] C. Cohen Tannoudji, J. Dupont Roc, G. Grynberg. "Processus d'interaction entre photons et atomes." Editions du C.N.R.S., chapitre V.
- [65] C. G. Townsend, N. H. Edwards, C. J. Cooper, K. P. Zetie, C. J. Foot, A. M. Steane, P. Szriftgiser, H. Perrin, J. Dalibard. "Phase-space density in the magneto-optical trap." Phys. Rev. A 52, 1423 (1995).
- [66] J. Dalibard. Opt. Commun. 68, 203 (1988).
- [67] D. Grison. "Atomes piégés et refroidis par laser à quelques microkelvin : un piège

- magnéto-optique dans une cellule de césium et quelques applications." Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie - Paris (1992).
- [68] T. Walker, D. Sesko, C. Wieman. "Collective behavior of optically trapped neutral atoms". *Phys. Rev. Lett.* 408, 64 (1990).
- [69] A. D. Fokker. *Ann. Physik.* 43, 810 (1914).
- [70] M. Planck. *Sitzber. Preuß. Akad. Wiss.* 324 (1917).
- [71] H. Risken. "The Fokker-Planck Equation : methods of solution and applications." (Springer, Berlin, Heidelberg, 1989).
- [72] J. Dalibard, S. Reynaud, C. Cohen Tannoudji. *J. Phys. B : At. Mol. Phys.* 17, 4577 (1984).
- [73] D. S. Weiss, E. Riis, Y. Shevy, P. J. Ungar, S. Chu. *J. Opt. Soc. Am. B6*, 2072 (1989).
- [74] D. M. B. P. Milori, M. T. Araujo, I. Guedes, S. C. Zilio, V. S. Bagnato. *Braz. J. Phys.* 27 (2), 80 (1997).
- [75] L. Mandel, E. Wolf. "Optical Coherence and Quantum Optics." (Cambridge University Press, Cambridge, 1995).
- [76] Yannick Bidet. "Piégeage et refroidissement laser du strontium : Etude de l'effet des interférences en diffusion multiple." Thèse de doctorat, Université de Nice - Sophia Antipolis - Nice, France (2002).
- [77] D. Wineland, W. Itano. *Phys. Rev. A* 20, 1521 (1979).

- [78] P. J. Ungar, D. S. Weiss, E. Riis, Steven Chu. "Optical molasses and multilevel atoms : theory." J. Opt. Soc. Am. B 6, 2058 (1989).
- [79] C. Salomon, J. Dalibard, W. D. Phillips, A. Clairon, S. Guellati. "Laser Cooling of Cesium Atoms below $3\mu K$." Europhys. Lett., 12 (8), 683 (1990).
- [80] A. M. Steane, M. Chowdhury, C. J. Foot. "Radiation force in the magneto-optical trap." J. Opt. Soc. Am. B 9, 2142 (1992).
- [81] A. Abada, K. Bouakaz. JHEP 01, 161 (2006).